ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 8

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sea A una matriz $n\times n$ y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ su correspondiente campo lineal. Si F es un campo gradiente y $u(x) = \langle Ax, x\rangle$, entonces $\nabla u = F$.

2. Sean $D = (d_{i,j})$ una matriz diagonal 3×3. Sea h la solución de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}^3$ definida por $\frac{dh}{dt} = Dh, h(0) = 0$ y definamos $V(t)$ como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $h_1(t), h_2(t)$ y $h_3(t)$, $\forall\, t > 0$. Entonces $\frac{dV}{dt} = (\operatorname{tr} D)V$. (Ya que $\operatorname{tr} D$ es la divergencia del campo lineal $F(h) = Dh$, esto permite interpretar la divergencia como la razón con que el campo cambia el volumen.)

Definición La función *gamma de Euler* Γ está dada por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \forall\, x > 0.$$

3. Entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $(0! := 1.)$

4. Calcula el flujo del campo $F(x, y, z) := (e^{x+z}, 0, -e^{x+z} + 2y)$ a través de la esfera unidad centrada en el origen.

5. Sean $a, b > 0$. Transforma el problema

$$\begin{cases} -au_{x_1x_1} - bu_{y_1y_1} = f, & \text{en } D := x^2 + y^2 < 1 \\ u = \varphi, & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

a uno con la ecuación de Poisson.

6. Sean $u \in C^\infty(U)$ y L un operador diferencial con coeficientes constantes. Si u es armónica, prueba que Lu también.

7. Si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, prueba que $f * g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

8. Supongamos que $K \subset W \subset \mathbb{R}^n$, K es compacto y W es abierto. Prueba:

i) Existe $r > 0$ tal que $K + B_r \subset W$.

ii) $V := K + V_r$ es abierto, $K \subset V \subset \overline{V} \subset W$ y $\overline{V}$ es compacto.

Definición Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *unitaria*, si cumple que $\langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$

9. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal unitaria, prueba:

i) T es invertible y $T^{-1} = T^t$ (consideradas como matrices).

ii) La trasformación lineal T^{-1} también es unitaria

Definición Sea V un espacio vectorial (real). Una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una *norma* en V, si tiene las siguientes propiedades:

a) $\|x\| \geq 0, \ \forall\, x \in V$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

b) Desigualdad del triángulo: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in V$.

c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \ x \in V$.

10. $B(D, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(D, \mathbb{R})$.

11. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y no-vacío. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua que se puede extender continuamente a $\overline{D}$, prueba:

i) f es uniformemente continua.

ii) f es acotada.

Para revisar y entregarse el martes 2 de octubre, 2018