ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 9

1. Si A es una matriz 3×3, encuentra los valores propios reales de su parte antisimétrica A_a.

2. Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo lineal, entonces F se puede expresar como $F = F_g + F_r$, donde F_g es un campo gradiente y F_r es un campo rotacional.

3. $0 < \Gamma(x) < \infty, \forall\, x > 0$.

4. Sean $a, b, c > 0$. Transforma el problema

$$\begin{cases} -cu_t - au_{x_1x_1} - bu_{x_2x_2} = f & \text{en } \mathbb{R}^2{\times}\mathbb{R}_+, \\ u = g & \text{‘en’ } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

a uno con la ecuación de calor.

5. Sean $U \subset \mathbb{R}^n, x \in U$ y $r > 0$. Si U es abierto y $B_r(x) \subset U$, prueba que existe $s > r$ tal que $B_s(x) \subset U$.

6. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con la propiedad G. Si $u \in C^2(U)$ es armónica, entonces existe una función $v : U \to \mathbb{R}$ tal que $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$. En este caso diremos que v es una *función armónica conjugada* de u.

Definición Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Dada $u \in C^2(U)$ y $x \in U$ denotaremos su matriz hessiana en x por $Hf(x)$, esto es $Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.

7. Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una matriz (u operador lineal) y $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $H(u \circ A)(x) = A^t(Hu \circ Ax)A$.

8. Si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, prueba que $f * g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

9. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal unitaria, prueba:

i) $T(B_r(a)) = B_r(T(a))$.

ii) $T(\partial B_r(a)) = \partial B_r(T(a),\ \forall\, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.

10. Sea B una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ o $B = \mathbb{R}^n$. Si $f \in C(B)$ y f es integrable, definamos $\|f\|_1 := \int_B |f| dx$. Prueba que $\| \cdot \|$ es una norma.

Definición Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es *acotado*, si existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|,\ \forall\, x \in X$.

11. Sean X y Y espacios normados. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, prueba que T es continuo.

Observación La definición de continuidad en un espacio normado es formalmente la misma que en $\mathbb{R}^n$ sólo que en lugar de la norma euclidiana consideramos una norma abstracta.

Para revisar y entregarse el martes 8 de octubre, 2018