ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 10

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sean $a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ y $B = B_r(a)$.

i) Si $x \in \partial B$, encuentra $\vec{n}(x)$, el vector unitario externo normal a ∂B en x

ii) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal unitario, entonces $T\vec{n}(x)$ es el vector unitario externo normal a ∂TB en $Tx \in TB$.

2. Sea $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua y absolutamente integrable en $\mathbb{R}^n$. Si $h \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces hg es absolutamente integrable en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua y absolutamente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_\epsilon} g(x)dx = 0$.

4. $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

5. Si $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es una función armónica y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal unitario, entonces la composición $v = u \circ T$ también es armónica.

6. Si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

7. Si $a_1, \ldots, a_n > 0$ y $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, encuentra una solución de la edp

$$a_1 u_{x_1x_1} + \cdots + a_n u_{x_nx_n} = f \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

8. Consideremos la función f definida por $f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$.

Entonces $f^{(k)}(0) = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

9. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si T es continuo, prueba que T es acotado.

10. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y no-vacío, y $f : D \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Dado $x \in \overline{D}$, escojamos una sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \to x$ y definamos $\tilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Entonces $\tilde{f}$ está bien definida, es continua y es una extensión de f. (Este ejercicio, junto con el 8.11, permite identificar $C(\overline{D})$ con el subespacio de $C(D)$ formado por las funciones que son uniformemente continuas.)

Definición La *distancia de un punto* $x \in \mathbb{R}^n$ *a un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ es $\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

11. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es no-vacío, entonces

$$|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq d(x, y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Concluye que la función $x \to \mathrm{dist}(x, A)$ es uniformemente continua.

Para revisar y entregarse el lunes 15 de octubre, 2018