ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 11

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2. Calcula $\displaystyle\int_{\|x-a\|<\frac{\|a\|}{2}} \frac{dx}{\|x\|^{n-2}}$, donde $n \geq 3$ y $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función localmente R-integrable.
i) Si f es continua en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_r(x) \to f(x)$ cuando $r \to 0$.
ii) Si f es continua, entonces existe una sucesión $\{g_m\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = \lim_{m\to\infty} g_m$.
iii) Si f es uniformemente continua, entonces existe una sucesión $\{g_m\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = \lim_{m\to\infty} g_m$ uniformemente.

4. Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polinomio en n variables. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, prueba que existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta u = p$ en U.

5. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in C^2(U)$ y $x \in U$. Si existe $R > 0$ tal que $\Delta u \geq 0$ en $B_R(x) \subset U$, prueba que $u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u$ para $0 < r \leq R$.

6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces A es abierto y cerrado si, y sólo si, $\mathrm{Fr}A = \phi$.

7. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo y $f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces $f(A)$ es conexo.

8. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\mathrm{dist}(x, A) = 0$.

9. Sea $\alpha > 0$. Prueba que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{\ln r}{r^\alpha} = 0$.

Definición Sea V un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una *seminorma* si tiene las propiedades de una norma, excepto que puede haber elementos $x \in V$ tales que $x \neq 0$ y $\|x\| = 0$.

Notación Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, denotaremos por $R[a, b]$ el subespacio de $F([a, b], \mathbb{R})$ formado por las funciones Riemann integrables.

10. La función $\|f\|_1 := \int_a^b |f|$ es una seminorma en $R[a, b]$ que no es norma.

11. Sea $1 \leq p < \infty$. Prueba que $a^p + b^p \leq (a + b)^p,\ \forall\, a, b \geq 0$.

Para revisar y entregarse el miércoles 24 de octubre, 2018