ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 12

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{Fr}A = \phi$, entonces $A = \phi$ o $A = \mathbb{R}^n$.

2. $V(n+2) = \frac{2\pi}{n+2}V(n),\ n \geq 2$. ($V(0) := 1$.) (Sug.: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, expresa $x = (y, z)$ donde $y \in \mathbb{R}^2$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Calcula después $V(n+2)$ usando el teorema de Fubini con $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$.)

3. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $z \in U,\ R > 0$ tales que $B_R(z) \subset U$. Si $\Delta u \geq 0$ en U, entonces $u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta$ si $0 < r \leq R$.

4. (Teorema de Liouville para funciones holomorfas) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es de clase C^2, tiene derivada compleja en $\mathbb{C}$ y f es acotada, entonces f es constante.

5. Si u es armónica y acotada en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces $\lim_{\|x\|\to\infty} Du(x) = 0$.

6. Sea α tal que $0 < \alpha < 1$. Si $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ es armónica y $|u(x)| \leq C\|x\|^\alpha$, entonces $u = 0$.

7. Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = f$.

8. Sean $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ y $g := \ln\|x\| * f$. Entonces $\displaystyle\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{g(x)}{\|x\|^\alpha} = 0, \forall\, \alpha > 0$.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $K : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Dada $f \in C([a, b])$ definamos $Tf : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$.

Entonces T está bien definido y es un operador lineal acotado de $C[a, b]$ en $C[a, b]$ (con la norma del supremo). A un operador de este tipo se le llama *operador integral* y K es su *núcleo*.

Definición Sea V un espacio vectorial real. Un *producto escalar* en V es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^2 \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

a) Para cada $y \in V$, la correspondencia $x \to \langle x, y\rangle$ es lineal.

b) Es simétrico: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall\, x, y \in V$.

c) Es definido positivo: $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in V$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Para $f, g \in V = C([a, b])$ definamos

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b fg.$$

Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en V.

11. Si $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $j \neq k$, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} kx \; dx = 0$.

Para revisar y entregarse el lunes 29 de octubre, 2018