ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 13

Cuando corresponda, prueba lo senãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \phi$, entonces $A \cup B$ también es conexo.

2. Si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y u es integrable, prueba que $u = 0$.

3. i) Si $n = 2k$, donde $k \in \mathbb{N}$, entonces $V(n) = \frac{\pi^k}{k!}$.
ii) Si $n = 2k-1$, donde $k \in \mathbb{N}$, entonces $V(n) = \frac{k!\,2^{2k}\pi^{k-1}}{(2k)!}$.

4. Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$. Si $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ es una solución de $-\Delta u = f$ y cumple que existen $R > 0$ y $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$|u(x)| \leq C\|x\|^\alpha \text{ si } \|x\| > R,$$

prueba que existe una constante c tales que $h = \ln ||x|| * f + c$.

5. Encuentra un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una función $u \in C(\overline{U}) \cap C^2(U)$ que es armónica, acotada en ∂U y no acotada en U.

6. Sean V y W espacios vectoriales de igual dimensión finita. Si $T : V \to W$ es 1-1, prueba que T es sobre.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $\int_a^b K(x,y)f(y)dy = 0, \forall\, x \in [a,b], \ \forall\, f \in C([a,b])$, prueba que $K = 0$.

8. Si $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $j \neq k$, prueba que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \, \cos kx \; dx = 0$.

9. Sean M un espacio métrico y A, B subconjuntos no-vacíos de M, que son cerrados y disjuntos. Consideremos $f := \frac{d_B}{d_A + d_B}$. Prueba que $f : M \to [0,1]$ es continua, $A = f^{-1}(1)$ y $B = f^{-1}(0)$.

Definición Dada una sucesión $a := \{a_k\} \subset \mathbb{R}$ definimos $\|a\|_1 := \sum_{k=1}^\infty |a_k|$ y denotaremos por ℓ^1 el conjunto formado por todas aquellas sucesiones a tales que $\|a\|_1 < \infty$.

10. Prueba que ℓ^1 es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_1$ es una norma en ℓ^1.

11. Si $0 < p < 1$, prueba que $(a+b)^p \leq a^p + b^p, \ \forall\, a, b \geq 0$.

Para revisar y entregarse el jueves 15 de noviembre, 2018