ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: TAREA 14

Cuando corresponda, prueba lo señãlado. Si no se indica otra cosa, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto no-vacío.

1. Si $u : U \to \mathbb{R}$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ son de clase C^1, entonces se cumple que $\operatorname{div} uF = \langle \nabla u, F\rangle + u \operatorname{div} F$.

2. $V(n) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos $u_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$.

3. Si u es armónica, entonces u_λ es armónica.

4. Si $n \geq 2$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{\frac{n}{2}}} dr = \frac{n-3}{n-2} \int_0^\infty \frac{r^{n-4}}{(1+r^2)^{\frac{n-2}{2}}} dr.$

5. Sea $u : U \to \mathbb{R}$. Si U es conexo, u es armónica y y existen $a \in U$ y $r > 0$ tales que $u = 0$ en $V_r(a)$, entonces $u = 0$.

6. Sea $n \geq 3$. Si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n_+)$ y $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

tiene solución.

7. Sean $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ y $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Encuentra una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U \\ u(x, x) = g(x) & \text{en } \partial U \end{cases} .$$

8. Sea K el núcleo de Poisson en $U = \mathbb{R}^n_+$. Dada $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, tomemos $u_g(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y)g(y)dy$ y $T : C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \to L^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ definido por $Tg = u_g$. Entonces T es un operador lineal inyectivo.

9. Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Para revisar y entregarse el miércoles 21 de noviembre, 2018