INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 1

1-2. Sea $\{\mathcal{C}_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia (no-vacía) de colecciones formadas por subconjuntos de Ω. Prueba que $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{C}_\alpha$ sigue teniendo la propiedad indicada:
i) Cada $\mathcal{C}_\alpha$ es un anillo.
ii) Cada $\mathcal{C}_\alpha$ es un álgebra en Ω.
iii) Cada $\mathcal{C}_\alpha$ es una σ-álgebra en Ω.

3-4. En cada caso, encuentra un conjunto Ω y una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω tal que:
i) $\mathcal{C}$ sea un anillo y no sea un álgebra.
ii) $\mathcal{C}$ sea un álgebra y no sea una σ-álgebra .

5-6. Sea $\mathcal{C}$ una colección formada por subconjuntos de Ω y $A \subset \Omega$. Prueba:
i) Si $\mathcal{C}$ es un anillo en Ω, entonces $\mathcal{C}_A$ es un anillo en Ω.
ii) Si $\mathcal{C}$ es un álgebra en Ω, entonces $\mathcal{C}_A$ es un álgebra en Ω. iii) Si $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra en Ω, entonces $\mathcal{C}_A$ es una σ-álgebra en Ω.
(Observación: $\mathcal{C}_A \equiv \{C \cap A : C \in \mathcal{C}\}$.)

7-8. Sea $f : \Omega \to W$, $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω.
i) Si $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra , prueba que $f_*(\mathcal{C})$ también lo es.
ii)-iii) Determina si el resultado correspondiente sigue siendo cierto en los casos en que $\mathcal{C}$ es un anillo o un álgebra.

9-10. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos en Ω y $A \subset \Omega$. i) Prueba que $\sigma(\mathcal{C}_A) = \sigma(\mathcal{C})_A$. ii)-iii) Determina si el resultado análogo es válido en el caso de un anillo o de un álgebra.

Para revisar y entregarse el jueves 4 de febrero, 2010.