INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 2

1. Sean (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2) espacios medibles tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. i) Prueba que la colección $\Sigma \equiv \{A_1 \cup A_2 : A_j \in \Sigma_j,\ j = 1, 2\}$ es una σ-álgebra en $\Omega \equiv \Omega_1 \cup \Omega_2$. ii) ¿Qué sucede en el caso de álgebras o anillos?

2. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Prueba que $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(E)_A$.

3. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω. Si $\emptyset \in \mathcal{C},\ \Omega \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, prueba que $\sigma(\mathcal{C})$ consiste de los conjuntos que se pueden expresar como unión disjunta de conjuntos de la forma $A \setminus B$, donde $A, B \in \mathcal{C}$ y $B \subset A$.

4. Sean (Ω, Σ) y $(W, \mathcal{S})$ espacios medibles. Expresa la medibilidad de una función $f : \Omega \to W$ en términos de $f_*(\Omega)$.

5. Sean Ω y W espacios medibles. i) Si $f : \Omega \to W$ es constante, prueba que f es medible.ii) Encuentra una σ-álgebra en $\mathbb{R}$ tal que las únicas funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \Sigma) \to \mathbb{R}$ sean las funciones constantes.

6. Sea Ω un espacio medible y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Prueba que f es medible si, y sólo si, $\{x \in \Omega : t < f(x)\}$ es medible, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

7. Sea $H \equiv \chi_{(0,\infty)}$ la función de Heaviside. Para cada $c \in \mathbb{R}$ definamos $T(c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T(c)(x) \equiv H(x + c)$. Prueba que $T : (\mathbb{R}, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ no es medible. (Sug.: Observa que $\|T(c) - T(s)\| = 1$, si $c \neq s$.)

8. Sea X un espacio normado. Si $A, B \subset X$ son separables, prueba que $A+B$ es separable.

9. Prueba que ℓ^p es separable, $\forall\, p \in [1, \infty)$.

10. Prueba que ℓ^∞ no es separable.

11. Sea Ω un espacio medible y X un espacio normado. i) Define cuándo $f : \Omega \to X$ es *débilmente medible*. ii) Prueba que si f es medible, entonces f es débilmente medible.

12. Sea M un espacio métrico y $A \subset M$ no-vacío. Prueba que la función $\rho(x) \equiv d(x, A),\ x \in M$, es continua.

Para revisar y entregarse el jueves 11 de febrero, 2010.