INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 3

Definición Una colección $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ es un σ-*anillo*, si $\mathcal{R}$ es un anillo y además cumple que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, cuando $A_n \in \mathcal{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. Sea $\mathcal{R}$ un σ-anillo que no es σ-álgebra . Prueba que su σ-álgebra generada es $\sigma(\mathcal{R}) = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{R} \text{ o } A^c \in \mathcal{A}\}$.

2. Sean Ω y W espacios medibles, y supongamos que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, la restricción $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$ es medible, prueba que f es medible. (Obs.: En Ω_n consideramos la σ-álgebra Σ_{Ω_n}.)

3. Sea M un espacio métrico. Si M es separable y $A \subset M$ es denso, prueba que existe un subconjunto numerable de A que es denso en M.

4. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Si $B \subset A$, prueba que $\overline{B}^A = \overline{B}^E$, donde $\overline{B}^C$ indica que la cerradura de B es respecto al conjunto C.

5. Sea E un espacio topológico. Si $A_n \subset E$ es separable, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ es separable.

6. Sea Ω un espacio medible no-vacío, $f : \Omega \to \mathbb{K}$, X un espacio normado y $v \in X$. Si f es medible, prueba que $g : \Omega \to X$ definida por $g(a) \equiv f(a)v$, es medible.

7. Sea Ω un espacio medible y H un espacio de Hilbert separable. Si una función $f : \Omega \to H$ es débilmente medible, prueba que f es medible. (Sug.: H tiene una base ortonormal.)

8. Sea Ω un conjunto no-vacío y X un espacio normado. Prueba: i) $B(\Omega, X)$ es un espacio normado. ii) Si X es completo, entonces $B(\Omega, X)$ es completo.

9. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Sigma$.
i) Si $A_{n+1} \subset a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y algún A_n tiene medida finita, prueba que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
ii) Señala una familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos Lebesgue-medibles en $\mathbb{R}$, tales que $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

10. Sea Σ una σ-álgebra y $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Si μ es aditiva y para cualquier familia $\{A_n\} \subset \Sigma$ tal que $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n)$, prueba que μ es una medida.

11. Consideremos $\Omega = \mathbb{N}$ y $\Sigma = 2^\mathbb{N}$. Para $A \subset \mathbb{N}$ definamos $\mu(A) = 0$ si $A = \emptyset, \mu(A) = \sum_{k=1}^n 2^{-j_k}$ si $A = \{j_1, \dots, j_n\}$ y $\mu(A) = \infty$ si A es infinito. Prueba que μ es aditiva y no es σ-aditiva.

Para revisar y entregarse el martes 23 de febrero, 2010.