INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 4

1. Sea Ω un espacio medible, $A \subset \Omega$ y E un espacio topológico. Si $f : \Omega \to E$ es medible, prueba que f_A también lo es.

2. Sea $\mathbb{R}^* \equiv \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Denotemos por τ la topología usual de $\mathbb{R}$ y tomemos $\mathcal{V}_{-\infty} \equiv \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{V}_{\infty} \equiv \{(b, \infty] : b \in \mathbb{R}\}$.

Definimos que un conjunto $W \subset \mathbb{R}^*$ es *abierto* si, para cada $p \in W$, existe $V \in \tau \cup \mathcal{V}_{-\infty} \cup \mathcal{V}_{\infty}$ tal que $p \in V \subset W$. Prueba: i) Lo anterior define una topología en $\mathbb{R}^*$. ii) $\mathbb{R}^*$ es compacto. iii) $\mathbb{R}$ es abierto y denso en $\mathbb{R}^*$. iv) La topología inducida por $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$ es su topología usual.

3. Sea Ω un espacio medible. Si $f : \Omega \to c_0$ es débilmente medible, prueba que f es medible. (Obs.: c_0 consiste de las sucesiones convergentes a cero.)

4. Sea Ω un espacio medible no-vacío, X y Y espacios normado, y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Dada $f : \Omega \to X$ definamos $Lf \equiv T \circ f : \Omega \to Y$. Se obtiene así un operador $L : \mathcal{F}(\Omega, X) \to \mathcal{F}(\Omega, Y)$. Prueba: i) L es lineal. ii) Si $f \in B(\Omega, X)$, entonces $T \circ f \in B(\Omega, Y)$ y el operador lineal $L : B(\Omega, X) \to B(\Omega, Y)$ es acotado.

5. Sea Ω un espacio medible. Si $s, t : \Omega \to \mathbb{K}$ son funciones simples, prueba que su producto st también lo es.

6. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Prueba que la colección de conjuntos con medida σ-finita es un σ-anillo.

7. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio con medida σ-finita y $A \subset \Omega$. Si para cada $B \in \Sigma_f$ se cumple que $A \cap B \in \Sigma$ y $\mu(A \cap B) = 0$, prueba que $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue-medible no-negativa y consideremos la medida $\mu_f(A) = \int_A f$. Encuentra una función f tal que: i) μ_f sea finita. ii) μ_f no sea σ-finita.

9. Sea $\mathcal{R}$ un σ-anillo en Ω que no es σ-álgebra y $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ una medida en $\mathcal{R}$. (Misma definición que en el caso de una σ-álgebra.) i) Si $A \subset \Omega$, prueba que no puede ocurrir que $A \in \mathcal{R}$ y $A^c \in \mathcal{R}$. ii) En $\sigma(\mathcal{R}) = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{R} \text{ o } A^c \in \mathcal{R}\}$ definamos $\nu(A) = \mu(A)$ si $A \in \mathcal{R}$ y $\nu(A) = \infty$ si $A^c \in \mathcal{R}$. Prueba que ν es una medida que es extensión de μ.

10. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio normado, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f, g, f_n, g_n : \Omega \to X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $f_n \to f$ y $g_n \to g$ c.t.p., prueba: i) $\lambda f_n \to \lambda f$ c.t.p. ii) $f_n + g_n \to f + g$ c.t.p.

11. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es derivable y su derivada es acotada, prueba que f preserva conjuntos de medida de Lebesgue cero.

Para revisar y entregarse el jueves 4 de marzo, 2010.