INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 5

1. Sea (Ω, Σ) un espacio medible y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$. Si $\mu(\emptyset) = 0$, μ es aditiva y μ es σ-subaditiva, prueba que μ es una medida.

2. Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Si A es separable, prueba que $\mathbb{K}A \equiv \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{K}, a \in A\}$ es separable.

3. Sea Ω un espacio medible y X un espacio normado. Si $f : \Omega \to \mathbb{K}$ es medible y $g : \Omega \to X$ es medible con rango separable, prueba que fg es medible.

4. Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Si A es separable, prueba que $\overline{A}$ es separable.

5. Sea E un espacio topológico y $A_n \subset E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si A_n es separable, prueba que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es separable.

6. Sea μ una medida en Ω, X, Y espacios normados, $f : \Omega \to X$, $g : \Omega \to Y$ y $h : \Omega \to X \times Y$ definida por $h \equiv (f, g)$. i) Si f y g son escalonadas, prueba que h es escalonada. ii) Si f y g son μ-medibles, prueba que h es μ-medible.

7. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Prueba que Ω es σ-finito si, y sólo si, $\chi \equiv \chi_\Omega$ es μ-medible.

8. Prueba la linealidad de la integral para funciones μ-escalonadas.

9. Sea $(\Omega, \Sigma, \mu$ un espacio de medida, X un espacio normado y $A \in \Sigma$. Entonces (A, Σ_A, μ_A) es un espacio de medida. Si $f \in \mathrm{St}(\Omega, X)$, entonces $f_A \in \mathrm{St}(A, X)$. Prueba que $\int_\Omega f_A d\mu_A = \int_\Omega f_{(A)} d\mu$.

10. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Si $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, prueba que f es $\mathcal{M}_{[a,b]} - \mathcal{M}$ medible. ($\mathcal{M}$ denota la σ-álgebra formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son Lebesgue-medibles.)

Para revisar y entregarse el jueves 11 de marzo, 2010.