INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 6

1. Sea $\mathcal{R}$ una colección de subconjuntos de Ω. Prueba: i) Si $\mathcal{R}$ es un anillo, entonces el álgebra generada por $\mathcal{R}$ es $\alpha(\mathcal{R}) = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{R} \text{ o } A^c \in \mathcal{R}\}$. ii) Si $\mathcal{R}$ es un σ-anillo, entonces $\alpha(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$.

2. Sea Ω un espacio medible y $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n| \leq C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, donde $C > 0$. Si cada f_n es medible, prueba que la función $g(x) \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ también es medible.

3. Si P es un polinomio, prueba que $P : (\mathbb{R}, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{M})$ es medible.

4. Sea (Ω, Σ) un espacio medible, μ y ν medidas en Σ y $\lambda \geq 0$. Prueba: i) $\mu + \nu$ y $\lambda\mu$ son medidas ii) Si μ y ν son σ-finitas, entonces $\mu + \mu$ es σ-finita.

Definición Una medida μ es semifinita, si cada conjunto medible de medida infinita, contiene conjuntos medibles de medida finita arbitrariamente grande.

5. Si μ es una medida, prueba que μ se puede expresar como $\mu = \mu_1 + \mu_2$, donde μ_1 es una medida semifinita y μ_2 es una medida que sólo toma los valores 0 e ∞. (Sug.: $\mu_1(A) \equiv \sup\{\mu(B) : B \text{ es medible },\ B \subset A,\ \mu(B) < \infty\}$.

6. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X, Y espacios normados. Si $s \in \mathrm{St}(\Omega, X)$ y $T \in B(X, Y)$, prueba que $T\circ s \in \mathrm{St}(\Omega, Y)$ y $\int_\Omega T\circ s\, d\mu = T \int_\Omega s d\mu$.

7. Sea $(\Omega, \Sigma, \mu$ un espacio de medida, X un espacio normado y $f : \Omega \to X$. Si $\{\Omega_n\}$ es una colección de conjuntos medibles tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y f es μ-medible en cada Ω_n, prueba que f es μ-medible.

Definición Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y X un espacio normado. Una función $f : \Omega \to X$ es *débilmente μ-medible*, si para cada $x^* \in X^*$ se cumple que $x^* f : \Omega \to \mathbb{K}$ es μ-medible.

8. Si $f : \Omega \to X$ es μ-medible, prueba que f es débilmente μ-medible.

9. Sea X un espacio normado y $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n^* \in X^*$ tal que $\|x_n^*\| = 1$ y $\langle x_n, x_n^*\rangle = \|x_n\|$. Prueba que $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|$, $\forall\, x \in \overline{D}$.

10. Sea X un espacio normado. Prueba que la colección formada por las sucesiones en X que son de Cauchy, con las operaciones usuales entre sucesiones, es un espacio vectorial.

11. Prueba que $\mathcal{L}^1(\mu, X)$ es un espacio vectorial.

El viernes 19 de marzo se realizará el primer examen parcial.
Para revisar y entregarse el martes 23 de marzo, 2009.