INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 7

1. Sea X un espacio normado y $r > 0$. Prueba que la función $g : X \to X$ definida por $g(x) \equiv \begin{cases} x, & \|x\| \leq r \\ r\frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > r \end{cases}$ es continua.

2. Sea (Ω, Σ) un espacio medible, X un espacio normado, y $f, s_n : \Omega \to X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si cada s_n es simple y $s_n \to f$ en Ω, prueba que existe $t_n : \Omega \to X$ tal que t_n es simple, $t_n \to f$ y $\|t_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita, X un espacio normado y $f : \Omega \to X$. Si X es separable, prueba que f es medible si, y sólo si, es débilmente medible. (Sug.: Dados $x \in X$ y $r > 0$, a partir del ejercicio 6.9 prueba que el conjunto $\{a \in \Omega : \|f(a) - x\| \leq r\}$ es medible.)

4. Sea (Ω, Σ) un espacio medible, $\Omega \neq \emptyset$. Prueba que la colección formada por las medidas $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ es un subconjunto cerrado de $B(\Sigma)$.

5. Sea D un espacio normado y X un espacio de Banach tal que $D \subset X$ con inclusión continua. Supongamos que si $\{x_n\} \subset D$ es una sucesión de Cauchy en D tal que $x_n \to 0$ en X, entonces siempre se cumple que $x_n \to 0$ en X. Prueba que la completación de D se puede identificar con el subespacio de X formado por aquellos x tales que existe una sucesión $\{x_n\}$ que es de Cauchy en D y $x_n \to x$ en X.

6. Prueba la linealidad de la integral en $\mathcal{L}^1(\mu, X)$.

7. Usando la medida de Lebesgue λ en $(0, \infty)$ proporciona una ejemplo de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables tal que $f_n \to 0$ uniformemente en $(0, \infty)$ y $\{\int_0^\infty d\lambda f_n\}$ no converge a cero.

8. Prueba que $\|\cdot\|_1$ define una seminorma en $\mathcal{L}(\mu, X)$.

9. Sea V un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una seminorma en V. Prueba: i) $N \equiv \{v \in V : \|v\| = 0\}$ es un espacio vectorial. ii) La función $\|[v]\| = \|v\|$, $\forall\, v \in V$, define una norma en el espacio cocienteV/N. iii) Sea $\{v_n\} \subset V$ y $v \in V$. Si $v_n \to v$ bajo la seminorma $\|\cdot\|$ y $w \in N$, entonces $v_n \to v + w$. (Luego, no hay unicidad de límite.)

10. Si V es un espacio seminormado completo, prueba que V/N es un espacio de Banach.

Para revisar y entregarse el martes 6 de abril, 2010.