INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 8

1. Sea (Ω, Σ) un espacio medible y $\{\mu_n\}$ una sucesión monótona creciente de medidas en Σ. Prueba que $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A),\ \forall A \in \Sigma$, define una medida en Σ.

2. Sea M un espacio métrico separable. Si $W \subset M$ es abierto, prueba que existe una colección numerable de bolas cerradas $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_m$.

3. Encuentra un intervalo $[a, b]$, una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea continua y creciente, y una función Lebesgue-medible $g : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ de manera que la composición $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ no es medible.

4. Prueba la desigualdad del triángulo en $\mathcal{L}^1(\mu, X)$.

5. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(\mu, X)$, prueba que existe una subsucesión $\{f_{n(k)}\}$ tal que $\{f_{n(k)}\}$ converge puntualmente μ-c.t.p.

6. Si $s \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$ y s es simple, prueba que s es escalonada.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dada $f \in L^1(\mu, X)$, definamos $\tilde{T}f \equiv Tf$. Prueba que $\tilde{T} : L^1(\mu, X) \to L^1(\mu, Y)$ define un operador lineal acotado.

8. Para $f \in L^1(\mu, X)$, tomemos $V(f) \equiv \|f\|$. Prueba que V define una función continua de $L^1(\mu, X)$ en sí mismo.

9. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, X un espacio de Banach, $f : \Omega \to \mathbb{K}$ y $x \in X$. Si f es integrable, prueba que $g(w) \equiv f(w)x,\ w \in \Omega$, es integrable y calcula su integral.

10. Sea $K \subset X$ un conjunto convexo tal que $0 \in K$. Si f es escalonada y $f \in K$ μ-c.t.p., prueba que $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in K$, para cualquier conjunto medible A con medida finita.

Para revisar y entregarse el martes 20 de abril, 2010.