

INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 9

1. Sea $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Si $0 \leq x \leq 1$, prueba que existe una sucesión $\{a_n\}$ de enteros tales que $0 \leq a_n < p, \forall n \in \mathbb{N}$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. (Si $p = 10$ la serie es llamada la expansión decimal de x , si $p = 2$ es la expansión binaria y cuando $p = 3$ es la expansión ternaria.)
2. (Continuación del ejercicio anterior) Recíprocamente, si $\{a_n\}$ es una sucesión de enteros tales que $0 \leq a_n < p$, prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ converge a un número $x \in [0, 1]$.

En seguida (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y X un espacio de Banach.

3. Dadas $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$, definamos $H(f, g) = f \wedge g$. Prueba que H define una función continua de $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})^2$ en $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$.

Notación Dado $A \in \Sigma$, denotaremos por M_A el operador lineal definido por $M_A(f) \equiv \chi_A f \in L^1(\mu, X), \forall f \in L^1(\mu, X)$.

4. Prueba: i) $M_A : L^1(\mu, X) \rightarrow L^1(\mu, X)$ es una proyección, $\forall A \in \Sigma$.
ii) Si $A, B \in \Sigma$ son conjuntos disjuntos, entonces $M_{A \cup B} = M_A + M_B$.
5. Prueba el caso del sup en el corolario que está antes del lema de Fatou.
6. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ y $f \geq 0$, prueba que

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup\left\{\int_{\Omega} s d\mu : s \in St(\mu, \mathbb{R}), 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Notación Sea $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Para indicar que $\{f_n\}$ es una sucesión monótona decreciente usaremos la notación $f_n \searrow$. Si además $f_n \rightarrow f$, expresaremos que $f_n \searrow f$. En el caso de una sucesión monótona creciente usaremos las notaciones $f_n \nearrow$ y $f_n \nearrow f$, respectivamente.

7. Si $\{f_n\} \subset L^1(\mu, \mathbb{R})$ y $f_n \searrow 0$, prueba que $f_n \rightarrow 0$ en L^1 .
8. Sea $\{f_n\} \subset L^1(\mu, \mathbb{R})$. Si $f_n \nearrow f$ y existe $C > 0$ tal que $\|f_n\|_1 \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$, prueba que $f \in L^1(\mu, \mathbb{R})$ y $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$.
9. Sean $f, g : \Omega \rightarrow X$. Si $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\mu, X)$ y $g = f, \mu$ -c.t.p., prueba que $g \in \mathcal{L}^{\infty}(\mu, X)$ y $\|g\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$.
10. Prueba que $\mathcal{L}^{\infty}(\mu, X)$ es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_{\infty}$ define una seminorma en $\mathcal{L}^{\infty}(\mu, X)$.

Para revisar y entregarse el jueves 29 de abril, 2010.