INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 10

1. (Continuación del ejercicio 9.2) Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n},$$

donde $a_1 = b_1, \ldots, a_{N-1} = b_{N-1}$, y $a_N > b_N$ prueba que $a_N = b_N + 1$ y $a_n = 0, b_n = p - 1, \forall\, n > N$.

2. Sea $p \in \mathbb{N}, p > 1$ y tomemos $._P a_1 a_2 \ldots a_{N-1} a_N a_{N+1} \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. Para cada $x \in [0,1]$ consideremos su expansión infinita en base p, esto es, que no es de la forma $._P a_1 a_2 \ldots 0$. Si $x = ._P a_1 a_2 \ldots a_{N-1} a_N a_{N+1} \ldots$ y $y = ._P a_1 a_2 \ldots a_{N-1} b_N b_{N+1} \ldots$, prueba que $x > y$ si, y sólo si, $a_N > b_N$.

3. Si $K \subset X$ es compacto, prueba que K es separable.

4. Sea Ω un espacio topológico σ-compacto Hausdorff, $\mathcal{B}$ su σ-álgebra de Borel y μ una medida σ-finita definida en $\mathcal{B}$. Prueba que $C(\Omega, X) \subset \mathcal{L}^1(\mu, X)$.

5. Sea $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu, X)$. Prueba que $\|f\|_\infty = 0$ si, y sólo si, $f = 0, \mu$-c.t.p.

6. Prueba que $\mathcal{L}^\infty(\mu, X)$ es completo.

7. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$ y $\{A_n\} \subset \Sigma$ es una sucesión de conjuntos disjuntos, prueba que la serie en X definida por $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$ converge absolutamente.

8. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$, prueba que, para cada $\epsilon > 0$, existe $A \in \Sigma$ de medida finita tal que $\left\| \int_\Omega f d\mu - \int_A f d\mu \right\| \leq \epsilon$.

9. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$. Si $\int_\Omega g f d\mu = 0$ para cualquier función $g \in \mathrm{St}(\mu, \mathbb{K})$, prueba que $f = 0, \mu-$c.t.p.

10. Sea H un espacio de Hilbert y $f \in \mathcal{L}^1(\mu, H)$. Si $b \geq 0$ y, para cualquier vector unitario $e \in H$ y cualquier conjunto $A \in \Sigma$ con medida finita, se cumple que $\left| \int_A \langle f, e \rangle d\mu \right| \leq b\mu(A)$, prueba que $\|f(x)\|_H \leq b, \mu$-c.t.p.

Para revisar y entregarse el martes 11 de mayo, 2010.