INTEGRAL DE BOCHNER: Tarea 11

1. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es monótona y $f(I)$ es un intervalo, prueba que f es continua.

2. Sea $x \in [0,1]$ y $x = ._T a_1 a_2 \ldots a_n$ su expansión ternaria infinita. Hagamos $N(x) = \infty$ si ningún a_n es 1; de lo contrario elijamos como $N(x)$ el menor valor de n tal que $a_n = 1$. Tomemos después $b_n = \dfrac{a_n}{2}$ para $n < N(x)$, $b_N = 1$ y definamos $h(x) \equiv \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{b_n}{2^n}$. Prueba que $h : [0,1] \to [0,1]$, llamada la *función ternaria* de Cantor, es monótona-creciente. (Sug.: Sean $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$. Para probar que $h(x) \leq h(y)$, hay que considerar las distintas posibilidades para $N(x)$ y $N(y)$. Desarrolla un caso con detalle.)

3. Prueba que la función ternaria de Cantor es continua.

4. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Si $f : \Omega \to \mathbb{K}$ es medible y μ es σ-finita, prueba que f es μ-medible.

5. Señala un espacio de medida (Ω, Σ, μ) respecto al cual haya una función medible que no sea μ-medible. (Sug.: considera el ejercicio 5.7.)

6. Sea $\{f_n\} \subset L^\infty(\mu, \mathbb{R})$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f_n \nearrow f$. Si existe $C > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq C,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, prueba que $f \in L^\infty(\mu, \mathbb{R})$ y $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$.

7. Prueba que las funciones simples forman un conjunto denso en $L^\infty(\mu, \mathbb{K})$.

8. Si $A \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto Lebesgue-medible, prueba que existen conjuntos $B, D \subset \mathbb{R}^N$ tales que $A = B \setminus D$, B es un conjunto G_δ y $D \in N(\lambda)$.

9. Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son Lebesgue-medibles. Prueba que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ es la completación de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$.

10. Sea μ^* una medida exterior en Ω. Si $A \subset \Omega$ es μ^*-medible, prueba que $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B),\ \forall\, B \subset \Omega$.

11. Sea M un espacio métrico y μ^* una medida exterior en M. Si cada conjunto boreliano es μ^*-medible, prueba que μ^* es de Carathéodory.

Para revisar y entregarse el jueves 20 de mayo, 2010.

NOTA: EL EXAMEN NO SERÁ LA PRÓXIMA SEMANA.