

# MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

(Análisis II)

## TEMARIO

### I. MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}$

0.5. Introducción.

1. Preliminares: Conjuntos y funciones.

2. Motivación de medida.  $\sigma$ -álgebra. Álgebra y anillo de conjuntos.

3.5 Medida exterior. Coincide con la longitud en intervalos.

4.5 Conjuntos medibles. Medida de Lebesgue. Medibilidad de los abiertos.

5.5 Conjuntos de medida cero. El conjunto de Cantor.

6. Invariancia bajo traslaciones.

7. Un conjunto no-medible.

8. La  $\sigma$ -álgebra de Borel. Aproximación por abiertos o cerrados.

### II. FUNCIONES MEDIBLES

9.5. Funciones medibles. Propiedades y ejemplos.

11. Operaciones con funciones medibles.

12. Límite de funciones medibles.

### III. INTEGRAL DE LEBESGUE

13. Integral de funciones simples no-negativas. Propiedades.

14.5. Integral de funciones medibles no-negativas. Propiedades.

16. Teorema de convergencia monótona. Aproximación de una función medible por funciones simples.

17.5. La integral en el caso general. Monotonía, linealidad,  $\sigma$ -aditividad, desigualdad del triángulo.

18.5. Lema de Fatou y teorema de convergencia dominada.

### IV. INTEGRAL DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}$

19.5. Relación con la integral de Riemann.

20.5. Unos ejemplos.

21.5. Relación con integrales impropias.

## V. MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

- 22.5. Medida de un rectángulo acotado. Medida exterior inducida.
- 23.5. Conjuntos medibles. Medida de Lebesgue. Medibilidad de rectángulos.
- 24.5. Medibilidad de los conjuntos abiertos. La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$ .  
Aproximación por abiertos o cerrados.
- 25. Invariancia bajo traslaciones.
- 26. Funciones de Lipschitz, preservación de conjuntos medibles.
- 27. Comportamiento bajo transformaciones lineales.

## VI. INTEGRAL DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

- 27.5. Invariancia bajo traslaciones.
- 28.5. Comportamiento bajo transformaciones lineales.
- 31.5. Teoremas de Tonelli y de Fubini.
- 33. Teorema de cambio de variable.

## BIBLIOGRAFÍA

1. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$* . Oxford University Press-México, 2002.
2. R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*. J. Wiley & Sons, New York, 1995.
3. A. Kolmogorov and S. Fomin, *Introductory real analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1970.
4. H. Royden, *Real analysis*. McMillan Pub. Co., New York, 1968.

FGF  
Enero 21, 2014