

( Análisis II)  
**MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE EN  $\mathbb{R}^n$**   
TEMARIO

I. FUNCIONES MEDIBLES

1.  $\sigma$ -álgebra, álgebra y anillo de conjuntos;  $\sigma$ -álgebra de Borel.
2. Funciones medibles. Propiedades y ejemplos.
- 3.5. Operaciones con funciones medibles.
4. Límite de funciones medibles.
5. Funciones simples. Aproximación de una función medible por funciones simples.

II. INTEGRAL CORRESPONDIENTE A UNA MEDIDA

6. Medida. Propiedades.
7. Conjuntos de medida cero. Medida completa. Medibilidad  $\mu$ -c.t.p
8. Integral de funciones simples no-negativas. Propiedades.
9. Integral de funciones medibles no-negativas. Propiedades.
10. Teorema de convergencia monótona y lema de Fatou.
12. La integral en el caso general: Linealidad, monotonía,  $\sigma$ -aditividad, desigualdad del triángulo.
13. Teorema de convergencia dominada.
14. Integrales dependientes de un parámetro.

III. MEDIDA EXTERIOR

- 15.5. Medida exterior. Medida inducida por una medida exterior.
17. Semianillo. Medida en un semianillo.

IV. MEDIDA DE LEBESGUE EN  $\mathbb{R}^n$

18. Semianillo formado por los rectángulos acotados.
19. Medida de un rectángulo acotado. Medida exterior de Lebesgue. Conjuntos Lebesgue-medibles. Medida de Lebesgue.
20. Medibilidad de un conjunto abierto. La  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}^n$ . Aproximación por abiertos o cerrados.
21. Invariancia bajo traslaciones.
22. El conjunto de Cantor.
23. Funciones de Lipschitz preservan conjuntos medibles.
24. Comportamiento bajo transformaciones lineales.

## V. INTEGRAL DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

25. Relación con la integral de Riemann.
26. Unos ejemplos.
27. Invariancia bajo traslaciones.
28. Comportamiento bajo transformaciones lineales.
31. Teoremas de Tonelli y de Fubini.
32. Medida producto.
33. Convolución.
35. Teorema de cambio de variable.

## BIBLIOGRAFÍA

1. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$* . Oxford University Press-México, 2002.
2. R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*. J. Wiley & Sons, New York, 1995.
3. C. Isnard, *Introdução à medida e integração*. IMPA, Río de Janeiro, 2007.
4. A. Kolmogorov and S. Fomin, *Introductory real analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1970.
5. H. Royden, *Real analysis*. McMillan Pub. Co., New York, 1968.

Fernando Galaz Fontes  
Enero 19, 2018