

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

(Temas Selectos de Análisis)

TEMARIO

I. MEDIDA DE LEBESGUE EN \mathbb{R}

1. Motivación. Conjuntos y funciones.
2. σ -álgebra, álgebra y anillo de conjuntos. Medida.
3. Medida exterior. Coincide con la longitud en intervalos.
5. Conjuntos medibles. Medida de Lebesgue. Medibilidad de un intervalo.
- 5.5. Conjuntos de medida cero.
6. El conjunto de Cantor.
- 6.5. Invariancia bajo traslaciones.
7. Un conjunto no-medible.

II. FUNCIONES MEDIBLES

- 8.5. Funciones medibles. Propiedades y ejemplos.
10. Operaciones con funciones medibles.
- 10.5. Partes positiva y negativa de una función.
- 11.5. Límite de funciones medibles.
- 12.5. Funciones simples. Aproximación de una función medible por funciones simples.
13. Propiedades válidas ‘casi-todas-partes’.

III. INTEGRAL DE LEBESGUE

14. Integral de funciones simples no-negativas. Propiedades.
15. Integral de funciones medibles no-negativas. Propiedades.
16. Teorema de convergencia monótona y lema de Fatou.
18. La integral en el caso general: Linealidad, monotonía, σ -aditividad, desigualdad del triángulo.
19. Teorema de convergencia dominada.

IV. MEDIDA DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

20. Medida de un rectángulo acotado. Medida exterior de Lebesgue.
Conjuntos Lebesgue-medibles. Medida de Lebesgue.
21. Medida en un semianillo. Medibilidad de los rectángulos.
22. Medibilidad de los conjuntos abiertos. La σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^n .
Aproximación por abiertos o cerrados.
- 22.5. Invariancia bajo traslaciones.
24. Comportamiento bajo funciones de Lipschitz.
25. Comportamiento bajo transformaciones lineales.

V. INTEGRAL DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

27. Teoremas de Tonelli y de Fubini.
- 27.5. Medida producto.
28. Invariancia bajo traslaciones.
29. Comportamiento bajo transformaciones lineales.
31. Teorema de cambio de variable.

VI RELACIÓN CON LA INTEGRAL DE RIEMANN EN \mathbb{R}^n

33. Relación con la integral de Riemann.
34. Unos ejemplos. Función gamma de Euler.
35. Relación con integrales impropias de Riemann.

BIBLIOGRAFÍA

1. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^N* . Oxford University Press-México, 2002.
2. R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*. J. Wiley & Sons, New York, 1995.
3. C. Isnard, *Introdução à medida e integração*. IMPA, Río de Janeiro, 2007.
4. A. Kolmogorov and S. Fomin, *Introductory real analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1970.
5. H. Royden, *Real analysis*. McMillan Pub. Co., New York, 1968.

Fernando Galaz Fontes
Agosto 2, 2019