

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

(Temas Selectos de Análisis)

TEMARIO

I. MEDIDA DE LEBESGUE EN \mathbb{R}

1. Motivación. Conjuntos y funciones.
2. σ -álgebra, álgebra y anillo de conjuntos.
3. Medida.
4. Medida exterior de Lebesgue. Coincide con la longitud en intervalos.
5. Criterio de Caratheodory. Conjuntos medibles.
6. Medida de Lebesgue. Medibilidad de un intervalo.
7. Conjuntos de medida cero. El conjunto de Cantor.
8. Invariancia bajo traslaciones. Un conjunto no-medible.
9. σ -álgebra de Borel.

II. FUNCIONES MEDIBLES

- 10.5. Funciones medibles. Propiedades y ejemplos. Medibilidad de funciones continuas.
12. Operaciones algebraicas y composición con funciones medibles.
- 12.5 Partes positiva y negativa de una función.
13. Límite de funciones medibles.
14. Funciones simples. Aproximación de una función medible por funciones simples.
15. Propiedades válidas casi todas partes.

III. INTEGRAL DE LEBESGUE

16. Integral de funciones simples no-negativas. Propiedades.
17. Integral de funciones medibles no-negativas. Propiedades.
18. La integral como medida.
19. Teorema de convergencia monótona y lema de Fatou.
- 21 La integral en el caso general: Desigualdad del triángulo, σ -aditividad, linealidad, monotonía.
22. Teorema de convergencia dominada.

IV. MEDIDA DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

- 22.5. Medida de un rectángulo acotado. Medida exterior de Lebesgue.
- 23.5. Extensión de una premedida definida en un semianillo.
- 25. Conjuntos Lebesgue-medibles. Medida de Lebesgue.
 - Medibilidad de los conjuntos abiertos. La σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^n .
 - Aproximación por abiertos o cerrados.
- 26. Invariancia bajo traslaciones.
- 27.5. Comportamiento bajo funciones de Lipschitz.
- 29. Comportamiento bajo transformaciones lineales.

V. INTEGRAL DE LEBESGUE EN \mathbb{R}^n

- 30. Relación con la integral de Riemann.
- 31. Unos ejemplos.
- 33. Teoremas de Tonelli y de Fubini.
- 34. Medida producto.
- 35. Comportamiento bajo traslaciones y transformaciones lineales.

BIBLIOGRAFÍA

1. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^N* . Oxford University Press-México, 2002.
2. R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue Measure*. J. Wiley & Sons, New York, 1995.
3. C. Isnard, *Introdução à medida e integração*. IMPA, Río de Janeiro, 2007.
4. A. Kolmogorov and S. Fomin, *Introductory real analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1970.
5. H. Royden, *Real analysis*. McMillan Pub. Co., New York, 1968.

Fernando Galaz Fontes
Agosto 8, 2021