MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: EXAMEN PARCIAL 3

Sólo hay que resolver 5 de los 6 ejercicios.

(**Desarrolla primero los que consideres más accesibles.**)

Duración: 2 horas.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Prueba que f es R-integrable si, y sólo si, f_+ y f_- lo son.

2 Dada $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, definamos $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(xs)\, f(s) ds, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Prueba que Tf está bien definida y es continua.

3. Determina si $f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}, x \in \mathbb{R}$.

4. Encuentra $a > 0$ tal que el área de $\{(x + ay, ax + y) : x, y \in [0, 1]\})$ es 3.

Definición Sean $B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $v = (x_0, h)$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $h > 0$. El *cono sólido* de base B y vértice v es el conjunto

$$K(B, h) := \{(x, 0) + t(v - (x, 0)) : x \in B, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

5. i) Bosqueja $K(B, h)$ cuando $B = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2, x_0 = (0, 0)$ y $h = 1$.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $f(x, t) = (x, 0) + t(v - (x, 0))$. Determina si f es de Lipschitz.

iii) Si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible y $v = (x_0, h)$ $(x_0 \in \mathbb{R}^n, h > 0)$, prueba que el cono $K(B, v)$ es un conjunto medible.

Definición Dada una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, recordemos que su gráfica es $G(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Si f es medible, prueba que su gráfica es medible.

ii) Si f es medible y no negativa, prueba que su gráfica tiene medida cero.

iii) Expresa $G(f)$ es términos de $G(f_-)$ y de $G(f_+)$.

iv) Si f es medible, prueba que su gráfica tiene medida cero.

Miércoles 8 de diciembre, 2021