**MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 1**

En cada caso prueba lo indicado.

1. Si $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de conjuntos, entonces $B \cup (\cap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$. En particular, $B \cup (A \cap D) = (B \cup A) \cap (B \cup D)$.

2. (Ley de De Morgan) Sea $A_\alpha \subseteq \Omega,\ \forall\, \alpha \in I$. Entonces $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

A continuación $A, B$ y $D$ son conjuntos. Prueba lo indicado.

3. $A \cap B = \phi$ si, y sólo si, $A \subseteq B^c$ $(A, B \subseteq \Omega)$.

4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

**Definición** La *diferencia simétrica* de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

5. El conjunto potencia $2^\Omega$ con la operación $(A, B) \mapsto A \triangle B$ es un grupo conmutativo.

6. Sean $f : D \to B$ y $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$, una colección de subconjuntos de B. Entonces $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(E_\alpha)$.

7. Sea $f : D \to B$. Entonces $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c,\ \forall\, A \subseteq B$

8. Si $A, B \subseteq \Omega$, entonces $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$. Por lo tanto, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ cuando $A \cap B = \phi$.

**Definición** Sea $f : D \to B$. Dada una $\sigma$-álgebra $\Sigma$ en $B$ definamos la colección $f^{-1}(\Sigma) := \{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$.

9. Entonces $f^{-1}(\Sigma)$ es una $\sigma$-álgebra en $D$.

10. Determina si las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) La unión de dos intervalos es un intervalo.

ii) La intersección de dos intervalos es un intervalo.

iii) La diferencia de dos intervalos es un intervalo.

**Definición** Sea $M$ un espacio métrico. El *diámetro* de un conjunto $A \subseteq M$ es $\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, donde $\sup \phi := 0$.

11. $m^*(A) \leq \operatorname{diam} A,\ \forall\, A \subseteq \mathbb{R}$.

Para entregarse el jueves 19 de agosto, 2021.