**MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 10**

Cuando corresponda $(\Omega, \Sigma)$ es un espacio medible y, de ser el caso, $\mu$ es una medida definida en $\Sigma$.

1. Sea $E \in \Sigma$ y $f : E \to \mathbb{R}^*$. Entonces $f \in \mathcal{L}(\mu_E)$ si, y sólo si, $f^\Omega \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Además $\int_\Omega f^\Omega d\mu = \int_E f d\mu_E$.

2. Sean $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ y supongamos que $f \leq g$. Entonces $\int_\Omega f < \int_\Omega g$ si, y sólo si, $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ tiene medida positiva.

3. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ y $\mu(\Omega) < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

4. Sean $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $f$ es integrable y $g$ es semiintegrable, entonces $f + g$ es semiintegrable y $\int (f + g) = \int f + \int g$.

5. El conjunto $\mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

**Definición** Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *integrable* si, y sólo si, su parte real y su parte imaginaria son integrables.

6. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es integrable si, y sólo, si $f$ es medible y $|f|$ es integrable.

7. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en $\Omega$ y supongamos que existe $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ es una premedida y $\mu(A) \leq C, \forall\, A \in \mathcal{A}$, entonces $\mu^*(E) \leq C, \forall\, E \in \Sigma(\mu^*)$.

8. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es $F_\sigma$, entonces $A$ es unión numerable de compactos.

9. Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in \mathcal{L}(K)$.

10. Sea $M$ un espacio métrico. Prueba que $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}, \ \forall\, A \subseteq M$.

11. Sean $X$ un espacio vectorial con seminorma $\|\cdot\|$ y $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Entonces:

i) $N$ es subespacio vectorial de $X$.

ii) La función $\|[x]\| := \|x\|$ define una norma en el espacio vectorial cociente $X/N$. Al espacio normado así obtenido lo llamaremos *espacio normado inducido por* la seminorma $\|\cdot\|$.

Para entregarse el jueves 21 de octubre.
Segundo examen parcial: viernes 29 de octubre, 12:30 pm.