MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 11

Notación Sea M un espacio métrico. Dado un conjunto $A \subseteq M$, denotaremos por d_A la función distancia a A.

1. Sean M un espacio métrico, $x \in M$ y $A \subseteq M$ un conjunto. Entonces $d_A(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in \overline{A}$.

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

2. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Si $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$, entonces $fg \in \mathcal{L}^0(\Sigma, \mathbb{C})$.

Definición Sea μ una medida en Σ. Una medida escalar, o una medida, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^*$ es *absolutamente continua* respecto de μ, si $\mathcal{N}_0(\mu) \subseteq \mathcal{N}_0(\nu)$. Para indicar lo anterior usaremos la notación $\nu \ll \mu$.

3. Sea $f \in \mathcal{L}_0(\Sigma)^+$. Determina si $\mu_f \ll \mu$.

4. Sea $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Si μ es σ-finita y $\int_E f = 0, \forall\, E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) < \infty$, entonces $f = 0$ c.t.p.

5. El espacio formado por las sucesiones $s = \{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$ que son integrables bajo la medida de contar $\mu_{\#}$, es ℓ^1.

6*. Sea $A_n \subseteq \Omega$ un conjunto medible, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, entonces existe $A \in \Sigma$ tal que A^c tiene medida cero y cada $x \in A$ pertenece sólo a un número finito de los conjuntos A_n.

7. Determina $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} (1 - x^2)^n$.

8. Todo conjunto cerrado en un espacio métrico es un conjunto G_δ.

9. Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Si f es continua y D es F_σ en $\mathbb{R}^n$, entonces $f(D)$ es σ-compacto.

Definición La *medida interior* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es

$$m_*(A) = \sup\{m(K) : K \subseteq A,\ K \text{ cerrado en } \mathbb{R}^n\ \}.$$

10. Entonces: i) $m_*(\phi) = 0$.

ii) m_* es monótona.

iii) Calcula $m_*(N)$, siendo $N \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto no-medible dado en clase.

Definición $L^1(\mu)$ es el espacio normado inducido en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mu,\mathbb{R})$ por la seminorma $\|f\|_1 := \int_\Omega |f|$. Aunque los elementos de $L^1(\mu)$ son clases de equivalencia se acostumbra seguirlos denotando como funciones y así lo haremos. Cuando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue, en lugar de $L^1(\mu)$ usaremos la notación $L^1(\Omega)$. Si $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu,\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{L}(\mu)$, notemos que $f_n \to f$ en L^1 significa que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, cuando $n \to \infty$.

11. ¿Qué es natural preguntarse acerca del espacio normado $L^1(\Omega)$?. (No hay que probarlo.)

Para entregarse el jueves 28 de octubre.
Segundo examen parcial: viernes 29 de octubre, 12:30 pm.

SUGERENCIAS

6*. Considera la función $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.