MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 12

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

1. Sea (M, Σ) un espacio medible, donde M es un espacio métrico. Si cada función continua $f : M \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $\mathcal{B}(M) \subseteq \Sigma$.

2. Si $f : D \to \mathbb{R}^*$ y $T : D \to D$, entonces $(f \circ T)_+ = f_+ \circ T$ y $(f \circ T)_- = f_- \circ T$.

3. El conjunto $\mathcal{L}(\mu, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo y la integral es un funcional lineal sobre los complejos.

4. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Si $f \in \mathcal{L}^1(E)$ y existe $b \geq 0$ tal que $|\int_A f dm| \leq b\, m(A)$, siempre que $A \subseteq E$ y $m(A) < \infty$, entonces $|f| \leq b$ c.t.p.

5. Dada una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definamos

$$V f(x) := \int_{[a,x]} f, \ \forall\, x \in [a, b].$$

Entonces $V f$ es continua.

6. Sean $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ y $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Si $f_n \to f$ en L^1, entonces se cumple que $\int_E f_n \to \int_E f, \ \forall\, E \in \Sigma$.

7. Observa que $C([a, b]) \subseteq L^1((a, b))$ y prueba que la 'inclusión' es continua.

8. i) $m_*(A) \leq m^*(A), \ \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$.
ii) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, entonces $m_*(E) = m^*(E)$.

9. Sea V un conjunto abierto en $\mathbb{R}^k$. Si $f : V \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1, entonces f es localmente de Lipschitz.

10. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, entonces T se puede expresar como composición finita de operadores lineales del tipo $T_{j,k}, M_{j,c}$ o $S_{j,k}$.

11. Sean X, Y conjuntos, $A, B \subseteq X$ y $D, E \subseteq Y$. Entonces

$$(A \setminus B) \times (D \setminus E) = A \times D \setminus ((A \times E) \cup (B \times D))$$

Para entregarse el jueves 4 de noviembre, 2021.