MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 13

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

Definición Sean (Ω, Σ) y (Ω_1, Σ_1) espacios medibles y $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ una medida. Si $T : \Omega \to \Omega_1$ es medible, definimos $\mu^T(A) := \mu(T^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \Sigma_1$.

1. Entonces $\mu(T)$ es una medida.

Definición Sea M un espacio métrico.

a) una función $f : M \to \mathbb{R}$ es *semicontinua inferiormente en* $a \in M$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(a) - \epsilon \leq f(x)$, para todo $x \in I$ tal que $|x - a| \leq \delta$.

b) Cuando $f : I \to \mathbb{R}$ sea semicontinua inferiormente en cada $a \in I$, diremos que es *semicontinua inferiormente*.

2. Sea M un espacio métrico. Entonces $f : M \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente si, y sólo si, para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in I : t < f(x)\}$ es abierto.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Para $f \in L^1((a, b))$, definamos $Vf(x) := \int_a^x f(s)ds$, $\forall\, x \in [a, b]$. Entonces V determina un operador lineal continuo de $L^1((a, b))$ en $C([a, b])$, al cual llamaremos *operador de Volterra*.

4. Enuncia y prueba el teorema de convergencia dominada para funciones con valores complejos.

5. Sea ν una medida escalar en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$. Si $\nu(R) = 0$ para cualquier rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^n$ que es abierto y acotado y $\nu \ll m_n$, entonces $\nu = 0$.

6. Encuentra un conjunto no medible $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m_*(A) = m^*(A)$.

7*. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $f : D \to \mathbb{R}^n$ es localmente de Lispschitz y $m < n$, entonces $f(D)$ tiene medida cero.

8. Bosqueja la región $\{t(1, 1) + s(-1, 2) : t, s \in [0, 1]\}$ y calcula su área.

Notación Para cada $r \geq 0$, tomemos $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$.

9. $m_n(S_r) = 0$, $\forall\, r \geq 0$.

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dada una función R-integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definamos $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $\forall\, x \in [a, b]$. Entonces F es derivable c.t.p.

11. Determina si la función $f(x) := \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \forall\, x > 0$, es integrable en el intervalo $(0, \infty)$.

Para entregarse el jueves 11 de noviembre, 2021.

SUGERENCIAS

7*. Ten presente el caso en que $m = n$.