MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 14

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

1. Sea M un espacio métrico. i) Si $f : M \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente, entonces f es Borel-medible.

ii) Encuentra una función semicontinua inferiormente que no sea continua.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica de $[-n, n]$. Determina si la sucesión de funciones $\{\frac{1}{n}\chi_n\}$ converge en L^1.

3. Si $\{f_n\}$ y f son como en el teorema de convergencia dominada, entonces $f_n \to f$ en $L^1(\mu)$.

4. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que, para cada $x, y \in [0,1]$, las funciones $y \mapsto f(x,y)$, $x \mapsto f(x,y)$ son continuas. Prueba que la función $F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy,\ 0 \le x \le 1$, es continua. En particular, si f es continua, entonces F es continua.

Definición La *transformada de Fourier* de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,s>} f(s)ds$, donde $i^2 = -1$ y $\langle \cdot \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

5. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ está bien definida, es acotada y continua.

6. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\int_K f = 0$ para cualquier conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $f = 0$ c.t.p.

7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $m^*(E) = m_*(E) < \infty$, entonces E es medible.

Definición Sean U y V abiertos en $\mathbb{R}^n$. Una biyección $g : U \to V$ es un *difeomorfismo de clase* C^1 si g y g^{-1} son de clase C^1.

8. Sean U y V abiertos en $\mathbb{R}^n$. Si $g : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1, entonces g y g^{-1} son $\mathcal{M} - \mathcal{M}$-medibles.

9. Determina si para cualquier función $\mathcal{M} - \mathcal{M}$-medible $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siempre se cumple que $m_{(T)} \ll m$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

10. Sean S_1 un semianillo de conjuntos en Ω_1 y S_2 un semianillo en Ω_2. Prueba que $\mathcal{S}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) := \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}$ es un semianillo en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Notación Sean Σ_1 y Σ_2 σ-álgebras en Ω_1 y Ω_2, respectivamente. Entonces $\Sigma_2 \otimes \Sigma_2$ es la σ-álgebra en $\Omega_1 \times \Omega_2$ generada por $\{A \times B : A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2\}$.

11. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{j+k}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^j) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Para entregarse el jueves 18 de noviembre, 2021.