MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 15

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

1. Sean $g(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ -y+3, & 2 \leq y \leq 3 \\ 0, & y \notin [0,3] \end{cases}$ y $f(x,y) = \begin{cases} g(y - \frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ f(x,y) = 0, & x = 0 \end{cases}$.

i) Para cada $x \in \mathbb{R}$, la función $f(x, \cdot)$ es continua e integrable en $\mathbb{R}$.

ii) La función F definida por $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx, \forall\, x \in \mathbb{R}$, no es continua en $x = 0$. (Compara con el ejercicio 14.4.)

2. Sea $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to B(\mathbb{R}^n)$ el operador transformada de Fourier, esto es, $Tf = \hat{f}$. Entonces T es lineal y continuo.

3. $\sigma(\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

4. Construye una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, tales que:

a) Cada f_n es R-integrable.

b) $\{f_n\}$ converge puntualmente en $[0,1]$.

c) $\{f_n\}$ es uniformemente acotada.

d) $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ no es R-integrable.

Observa que lo anterior indica que el teorema de convergencia dominada no se cumple con funciones R-integrables.

5. Sea $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}, 0 < x \leq 1,\ f(0) = 0$. Entonces en la clase de equivalencia de f bajo la relación $\sim$ (véase el ejercicio 7.8) ninguna función es R-integrable.

6. Sean $f, g \in \mathcal{L}(\Sigma)$. Si f^2 y g^2 son integrables, entonces fg es integrable.

Definición (Núcleos de Dirichlet) Sea $D_n(x) = \dfrac{\text{sen}(n+\frac{1}{2})x}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}, x \neq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

7. D_n es integrable en $[-\pi, \pi],\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definición Sea $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ un espacio de medida, $j = 1, 2$. En el semianillo $\mathcal{S}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ definamos $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) := \mu_1(A)\mu_2(A_2)$.

8. Entonces $\mu_1 \times \mu_2$ es una premedida en $\mathcal{S}$.

9. Sea $\mathcal{S}$ s un semianillo de subconjuntos de Ω. Entonces la colección $\mathcal{S}_\sigma$ es cerrada bajo intersección finita.

10. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $D \subseteq \Omega$ y $f : D \to \mathbb{R}^*$, Entonces f es μ-medible si, y sólo si, $f^\Omega : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es μ-medible.

11. Sea $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ un espacio de medida, $j = 1, 2$, y $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^*$. Si f es medible y $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(x, y)| d\mu_1 d\mu_2 < \infty$, entonces $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_1 d\mu_2 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_2 d\mu_1$.

Para entregarse el martes 30 de noviembre.
Segundo examen parcial: lunes 8 de diciembre, 12:30 pm.