MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 16

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Para $f \in \mathcal{L}((a,b))$ definamos la función Tf por $Tf(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy, \forall\, x \in [a,b]$. Entonces $Tf \in C([a,b]), \forall\, f \in \mathcal{L}(a,b)$.

2. Sea $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^3}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \geq 0$. Determina $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$.

3*. Sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$. Si $f_n \to f$ c.t.p., $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_\Omega |f_n| d\mu \to \int_\Omega |f| d\mu$, entonces $f_n \to f$ en $L^1(\mu)$.

4. Encuentra una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea $\mathcal{R}$-integrable y cuyo conjunto de discontinuidades no sea numerable.

5. Sea $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ una función monótona-decreciente. Entonces:

i) $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

ii) La serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente si, y sólo si, f es integrable.

6*. $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = \infty$.

7. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{j+k})$, entonces $B_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^j$.

8. Sean $f, f_k : \mathbb{R}^{j+k} \to \mathbb{R}^*, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $f_k \to f$ si, y sólo si, $(f_k)_x \to f_x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^j$.

Definición. Sean A y B conjuntos, $f : A \to \mathbb{R}^*, g : B \to \mathbb{R}^*$. Definimos $f \otimes g : A \times B \to \mathbb{R}^*$ por $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$.

9. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $f \in \mathcal{L}^0(\mathcal{M}(A))$ y $g \in \mathcal{L}^0(\mathcal{M}(B))$, prueba que $f \otimes g \in L^0(\mathcal{M}(A \times B))$.

10. Sea $f(x,y) = (2-xy)\, xye^{-xy}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ y observa que $f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy})$. Entonces:

i) Para cada $x \in [0,1]$, encuentra la integral de $g(y) = f(x,y)$ en $[0,\infty)$ y establece que $\int_0^1 (\int_0^\infty f(x,y)dy)dx = 0$.

ii) Para cada $y \in [0,\infty)$, encuentra la integral de $h(x) = f(x,y)$ en $[0,1]$ y establece que $\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = 1$.

iii) En vista de lo anterior, ¿qué se puede concluir acerca de f?

11. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Si $f \in \mathcal{L}^0(E)^+$, entonces el conjunto $A = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $m_{n+1}(A) = \int_E f dm_n$.

Para entregarse el martes 7 de diciembre, 2021.

SUGERENCIAS

3. Ten presente el lema de Fatou.
6. Observa que $0 < \operatorname{sen} u \leq u, \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y considera el cambio de variable $u = (n + \frac{1}{2})x.)$