MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 2

Enseguida A, B, D y Ω son conjuntos y el conjunto I es no-vacío. En cada caso prueba lo indicado.

1. (Ley de De Morgan) Sea $A_\alpha \subseteq \Omega,\ \forall\, \alpha \in I$. Entonces $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$.

2. El conjunto potencia 2^Ω, con las operaciones $A+B := A\triangle B$ y $AB := A\cap B$, es una anillo (algebraico) conmutativo con identidad.

3. Encuentra una función f y conjuntos $A, B \subseteq D(f)$ tales que $f(A\cap B)$ es subconjunto propio de $f(A)\cap f(B)$.

4. Sean Σ una σ-álgebra en Ω, $E \subseteq \Omega$ e $i : E \to \Omega$ la inclusión.

i) Encuentra $i^{-1}(\Sigma)$ y concluye que la colección $\Sigma_E := \{A\cap E : A \in \Sigma\}$ es una σ-álgebra en E.

ii) Si $E \in \Sigma$, observa que $\Sigma_E = \{A \in \Sigma : A \subseteq E\}$.

5. Para cada $\alpha \in I$ sea Σ_α una σ-álgebra en Ω. Entonces $\cap_{\alpha\in I}\Sigma_\alpha$ también es una σ-álgebra en Ω.

6. Una medida siempre es σ-subaditiva y subaditiva.

7. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Si $A, B \in \Sigma$, entonces

$$\mu(A\cup B) + \mu(A\cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Definición Dado $A \subseteq \Omega$, definamos $\mu_{\#}(A) := n$ si A tiene un número finito n de elementos, y $\mu_{\#}(A) = \infty$ en caso contrario.

8. La función $\mu_{\#}$ es una medida en 2^Ω; la llamaremos *medida de contar*.

Notación Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) denotaremos por Σ^{f} la subcolección de Σ formada por los conjuntos de medida finita.

9. Determina si Σ^{f} siempre es: i) Un anillo. ii) Un álgebra.

Definición Sean $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω y $\rho : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ tales que $\phi \in \mathcal{C}$ y $\rho(\phi) = 0$. Para $A \subseteq \Omega$ definamos

$$\rho^*(A) := \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^\infty \rho(I_n) :\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n;\ I_n \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

10. Entonces:

i) ρ^* es una medida exterior en Ω.

ii) Sea $A \subseteq \Omega$. Si no existe ninguna colección $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, entonces $\rho^*(A) = \infty$.

11. Determina si la colección $\mathcal{A} = \{V \cup K \subseteq \mathbb{R} : V \text{ es abierto}, K \text{ es cerrado}\}$ es un anillo en $\mathbb{R}$.

Para entregarse el jueves 26 de agosto, 2021.