MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 3

A continuación Ω es un conjunto. En cada caso prueba lo indicado.

1. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$.

2. Sea μ^* una medida exterior en Ω. Si $A, B \subseteq \Omega$ y $\mu^*(A) < \infty$, entonces $|\,\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$.

3. (Véase el ejercicio 2.10.) Sea $E \subseteq \Omega$. Si $\rho^*(I) = \rho^*(I \cap E) + \rho^*(I \cap E^c), I \in \mathcal{C}$, entonces E es $\Sigma(\rho^*)$-medible.

4. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible, entonces

$$m(E) = \sup\{m(A) : A \subseteq E, A \text{ es medible y acotado}\}.$$

Si $m(E) > 0$ concluye que existe un conjunto $A \subseteq E$ que es medible, acotado y $m(A) > 0$.

5. Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida (de Lebesgue) cero si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos acotados $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \epsilon$.

6. Sea Ω un conjunto arbitrario. Determina cuáles son los subconjuntos de medida cero bajo la medida de contar en Ω.

Definición Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y definamos

$$\overline{\Sigma} := \{E \cup A : E \in \Sigma \text{ y } A \subseteq B, B \in \mathcal{N}_0(\mu)\}.$$

7. Entonces $\overline{\Sigma}$ es una σ-álgebra y $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}$.

Sea $r \in \mathbb{N}, r > 1$. Dado cualquier número $x \in [0,1]$ expreseḿoslo en base r mediante su serie infinita correspondiente. Esto es, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r^n}$, donde $a_n \in \{0, \ldots, r-1\}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ y $a_N > 0$.

8. Sean $x, y \in [0,1]$ y expresémoslos en base r como describimos antes, digamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r^n}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n}$. Sea N el primer índice en donde difieren las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Entonces $x < y$ si, y sólo si, $a_N < b_N$.

9. Expresemos $x \in [0,1]$ con su expansión ternaria infinita, $x = ._T a_1 a_2 \ldots a_n$. Hagamos $N(x) = \infty$ si ningún a_n es 1; de lo contrario elijamos como $N(x)$ el menor valor de n tal que $a_n = 1$. Tomemos después $b_n = \dfrac{a_n}{2}$ para $n < N(x)$, $b_{N(x)} = 1$ y definamos $h(x) := \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{b_n}{2^n}$. Verifica que la función

$h : [0,1] \to [0,1]$ así construida es la *función ternaria de Cantor*. Establece que h es monótona creciente. (Obs.: Sean $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$. Para probar que $h(x) \leq h(y)$, considera las distintas posibilidades que $N(x)$ y $N(y)$ pueden tener. Desarrolla sólo un caso con detalle.)

10*. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c < d$. Si $f : [a,b] \to [c,d]$ es monótona creciente y suprayectiva, entonces f es continua.

11. Para $x, y \in \mathbb{R}$, definimos $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Verifica que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

Para entregarse el jueves 2 de septiembre, 2021.

SUGERENCIAS

10*. Considera el ejercicio 2.4 del curso de Análisis II.