MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 4

Enseguida Ω es un conjunto arbitrario. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sean $f : A \to B,\ g : B \to C$ y E un conjunto. Entonces

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)).$$

2. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega$. Si los conjuntos A_n son disjuntos entre sí, encuentra $\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}$. Justifica tu respuesta.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $m^*(A) = 0$, entonces A^c es denso en $\mathbb{R}$.

4*. Si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $0 \leq c \leq m(E)$, entonces existe un conjunto medible $A \subseteq E$ tal que $m(A) = c$.

5. (Continuación del ejercicio 3.7.) Dados $E \in \Sigma$ y $A \subseteq B$ donde $\mu(B) = 0$, definamos $\widetilde{\mu}(E \cup A) := \mu(E)$. Entonces $\widetilde{\mu}$ es una medida en $\widetilde{\Sigma}$, $\widetilde{\mu} = \mu$ en Σ y el espacio $(\Omega, \Sigma, \widetilde{\mu})$ es completo.

6. Sea $0 < \alpha < 1$ y modifiquemos el proceso seguido para la construcción del conjunto de Cantor como sigue. Tomemos $K_0 = [0, 1]$ y supongamos haber definido $K_0, \ldots, K_n$, de manera que K_n consiste de un número finito intervalos cerrados de igual longitud. Dividamos cada intervalo de K_n nuevamente en 3 subintervalos, pero ahora de forma que la longitud del intervalo abierto de enmedio sea ℓ_n, donde $\ell_0 = \frac{\alpha}{3}$ y $\ell_n = \frac{\ell_{n-1}}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Eliminando todos estos intervalos abiertos de K_n obtenemos K_{n+1}. Entonces $K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$ es compacto y $m(K) = 1 - \alpha > 0$.

7. Sean μ^* una medida exterior en Ω, $T : \Omega \to \Omega$ una biyección y $0 < k < \infty$. Si $\mu * (T(A)) = k\mu^*(A), \forall A \subseteq \Omega$, entonces T y T^{-1} preservan conjuntos $\Sigma(\mu^*)$-medibles.

8*. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible y $m(E) > 0$, entonces $m(E + \mathbb{Q}) = \infty$.

Definición Sean $f : \Omega \to E$ y Σ una σ-álgebra en Ω. Definimos entonces $\Sigma_f := \{A \subseteq E : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$.

9. La colección Σ_f es una σ-álgebra en E. De esta manera, partiendo de una σ-álgebra en el dominio de f se obtiene otra σ-álgebra en su contradominio.

Definición Sea E un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq E$ es G_δ, si existe una familia de abiertos $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A = \cap_{n=1}^{\infty} V_n$.

10*. Sea M un espacio métrico (no-vacío). El conjunto de puntos donde una función $f : M \to \mathbb{R}$ es continua es un conjunto G_δ y por lo tanto es boreliano.

11. Sea $s : \Omega \to \mathbb{R}$. Si es medible y sólo toma un número finito de valores, prueba que s se expresa como $s = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi A_n$ donde $a_1, \ldots, .., a_N \in \mathbb{R}$ y $A_1, \ldots, A_N$ son conjuntos medibles.

Para entregarse el jueves 9 de septiembre, 2021.

SUGERENCIAS

4*. Ten presente el teorema del valor intermedio.

8*. Considera primero un caso sencillo.

10*. Para cada $N \in \mathbb{N}$ considera el conjunto formado por todos los puntos $x \in M$ para los cuales existe $r > 0$ tal que si $u, v \in V_r(x)$, entonces se cumple $|f(u) - f(v)| < \frac{1}{N}$.