MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 5

Enseguida Ω es un conjunto no-vacío, posiblemente con una σ-álgebra Σ. En cada caso prueba lo indicado.

1. Sean $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ y $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ colecciones de conjuntos. Entonces $(\cup_{\alpha\in I} A_\alpha) \triangle (\cup_{\alpha\in I} B_\alpha) \subseteq \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha \triangle B_\alpha)$.

2. Sean $E \subseteq \Omega,\ i : E \to \Omega$ la inclusión y Σ una σ'álgebra en E. Encuentra Σ_i y concluye que la colección $\{A \subseteq \Omega : E \cap A \in \Sigma\}$ es una σ-álgebra en Ω.

3. (Véase el ejercicio 2.9.) Sea μ la medida inducida por ρ^*. Si μ es σ-finita, prueba que existe una colección $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$.

4. Sean μ^* una medida exterior en 2^Ω, μ la medida que induce y $A \subseteq \Omega$. Si existe un conjunto medible $E \subseteq \Omega$ tal que $\mu^*(A \triangle E) = 0$, entonces A es medible y $\mu(A) = \mu(E)$.

5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que existe $0 < \rho < 1$ tal que, para cada intervalo abierto y acotado I, se cumple $m^*(E \cap I) \leq \rho\ell(I)$. Entonces $m(E) = 0$.

(Así, si $m^*(E) > 0$, entonces para cualquier $\rho \in (0,1)$ existe un intervalo abierto y acotado I tal que $m^*(E \cap I) > \rho\ell(I)$. Es decir, $E \cap I$ es en medida "casi" todo el intervalo I.)

6. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f preserva conjuntos Lebesgue-medibles, entonces preserva conjuntos de medida cero.

7. Prueba que la colección de 'abiertos' definida para $\mathbb{R}^*$ en la clase 9, es efectivamente una topología en $\mathbb{R}^*$ (su topología usual).

8*. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f : I \to \mathbb{R}^*$ es una función monótona, entonces f es Borel-medible.

9. La función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ es continua. Naturalmente, consideramos a $\mathbb{R}^*$ con su topología usual

10. Si $f, g \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$, entonces el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\}$ es medible.

11. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*,\ f \neq 0$. Si f es medible, entonces $\frac{1}{f} \in \mathcal{L}^0(\Sigma_E)$, donde $E := \Omega \setminus f^{-1}(0)$ y $\frac{1}{\pm\infty} := 0$.

Para revisar y entregarse el viernes 17 de septiembre.
Primer examen parcial: viernes 24 de septiembre, 12:30 pm.

SUGERENCIAS

8*. Verifica que la imagen inversa bajo f de un intervalo es otro intervalo.