MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 7

Definición Sea $t^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ una función que es monótona, subaditiva y cumple $t^*(\phi) = 0$. Denotaremos entonces por $\mathcal{A}(t^*)$ la colección formada por los conjuntos $E \subseteq \Omega$ tales que $t^*(A) = t^*(A \cap E) + t^*(A \cap E^c)$, $\forall\, A \subseteq \Omega$.

1. Entonces: i) La colección $\mathcal{A}(t^*)$ es una álgebra en Ω y t^* es una medida finitamente aditiva en $\mathcal{A}(t^*)$.

ii) Si $E \subseteq \Omega$ y $t^*(E) = 0$, entonces $E \in \mathcal{A}(t^*)$.

2. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos de Ω. Si $A_n \cap A_m = \phi$ cuando $n \neq m$, entonces $\chi_{\cup_{n=1}^\infty A_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$.

3*. El espacio topológico $\mathbb{R}^*$, con su topología usual, es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Luego, $\mathbb{R}^*$ es compacto.

4. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^\infty$, respectivamente. Si $\{a_n\}$ converge (en $\mathbb{R}$), entonces $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

5*. Sean $f_n : D \to \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}; f : D \to \mathbb{R}^*$ y $x \in D$. Entonces $f_n(x) \to f(x)$ si, y sólo si, $(f_n)_+(x) \to f_+(x)$ y $(f_n)_-(x) \to f_-(x)$.

6. Sean (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2) espacios medibles y $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función medible. Si $s \in S(\Sigma_2)$, entonces $s \circ T \in S(\Sigma_1)$.

En lo que sigue (Ω, Σ) es un espacio medible y, cuando corresponda, μ es una medida definida en Σ.

7. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es μ-medible si, y sólo si, f es $\overline{\Sigma}$-medible.

8. Para $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ definimos $f \sim g$, si $f = g$ μ-c.t.p. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia.

9. Sea $E \in \Sigma$. Entonces $s \in S(\Sigma_E)$ si, y sólo si, $s^\Omega \in S(\Sigma)$.

10. Sea $E \in \Sigma$. Si $s \in S(\Sigma_E)^+$, entonces $s^\Omega \in S(\Sigma)^+$ y $\int_E s d\mu_E = \int_\Omega s^\Omega d\mu$.

Definición El *soporte* de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

11. Sea $s \in S(\Sigma)^+$. Entonces $\int_\Omega s < \infty$ si, y sólo si, su soporte tiene medida finita.

Para revisar y entregarse el jueves 30 de septiembre, 2021.

SUGERENCIAS

3*. Considera la función $h(x) = \frac{x}{1-x^2}, -1 < x < 1$.

5. Ten presente que $f_+(x) = f(x) \vee 0$ y $f_-(x) = -f(x) \vee 0$.)