MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 8

Cuando corresponda (Ω, Σ) es un espacio medible y, de ser el caso, μ es una medida definida en Σ.

1. (Véase el ejercicio 6.3.) Establece: i) $d^* \geq m^*$.

ii) Si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces $d^*(K) = m(K)$.

2. Sea $D \neq \phi$. Si $f \in F(D, \mathbb{R})$ y $A \subseteq D$, entonces $|\chi_A f| = \chi_A |f|$.

3. Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de conjuntos en Ω. Si $N \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{S}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{N} A_n$ se puede expresar como unión disjunta de elementos en $\mathcal{S}$.

4. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ una función medible. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p. si, y solo si, $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}) = 0$.

5. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si $f, g = 0$ μ-c.t.p., entonces $f + g = 0$ μ-c.t.p.

6. Sean $f, g, f_n : \Omega \to \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}$. Si $f_n \to f$ μ-c.t.p. y $f_n \to g$, μ-c.t.p., entonces $f = g$ μ-c.t.p.

7. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo con más de un punto y $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si $f = g$ c.t.p. y ambas funciones son continuas, entonces $f = g$. En particular, si $f = 0$ c.t.p. y f es continua, entonces $f = 0$.

8. Sean $f \in L^0(\Sigma)^+$ y μ_f su medida asociada. Entonces

$$\int_\Omega s \, d\mu_f = \int_\Omega s f d\mu, \ \forall \, s \in S(\Sigma)^+.$$

9. Para $x \in [0,1]$ definamos $f(x) = \frac{1}{q}$ si x es racional y $x = \frac{p}{q}$ en forma reducida; $f(x) = 1$, si x es irracional. Prueba que f es integrable y encuentra $\int_{[0,1]} f dm$.

10. Sea $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \forall \, n \in \mathbb{N}$ y $f := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \chi_{A_n}$. Entonces f es integrable.

11. Consideremos $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si $0 \leq f_n \leq f$ y $f_n \to f$, entonces $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

Para revisar y entregarse el jueves 7 de octubre, 2019.