**MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE: TAREA 9**

Cuando corresponda $(\Omega, \Sigma)$ es un espacio medible y, de ser el caso, $\mu$ es una medida definida en $\Sigma$.

1. Sean $V$ un espacio vectorial y $W$ un subespacio vectorial de $V$. Dados $x, y \in V$ definamos $x \sim y$ si $x - y \in W$. Entonces:

i) $\sim$ define una relación de equivalencia en $V$.

ii) Con las operaciones definidas mediante representantes, el espacio cociente $V/W$ es un espacio vectorial, al cual llamaremos *espacio vectorial cociente*.

2. Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ conjuntos. Si $A, B \subseteq \Omega_1$ y $D, E \subseteq \Omega_2$, entonces:

i) $(A \cup B) \times D = (A \times D) \cup (B \times D)$, $A \times (D \cup E) = (A \times D) \cup (A \times E)$.

ii) $(A \times D) \cap (B \times E) = (A \cap B) \times (D \cap E)$.

3. Sean $f \in L^0(\Sigma)^+$ y $\mu_f$ su medida asociada. Entonces

$$\int_\Omega g \, d\mu_f = \int_\Omega g f d\mu, \ \forall\, g \in L^0(\Sigma)^+.$$

**Definición** Sea $(\Omega, \Sigma)$ un espacio medible. Una función $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una *medida escalar*, si $\nu$ es $\sigma$-aditiva.

4. Sea $\nu$ una medida escalar en $(\Omega, \Sigma)$. Prueba:

i) $\nu(\phi) = 0$.

ii) $\nu$ es aditiva.

iii Sea $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$. Si $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\nu(\cup_{n=1}^\infty E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$.

5. Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si existen $E \in \Sigma$ y $0 < C < \infty$ tales que $|f| \leq C$ c.t.p. en $E$ y $\mu(E) < \infty$, entonces $f$ es integrable en $E$.

6. Si $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, entonces $f \wedge g$ y $f \vee g \in \mathcal{L}(\mu)$.

7. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$. Si $\Omega = A \cup B$, donde $A$ y $B$ son conjuntos medibles, y $f$ es integrable tanto en $A$ como en $B$, entonces $f$ es integrable.

8. Si $f \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_B f = 0, \forall\, B \in \Sigma$, entonces $f = 0$ $\mu$-c.t.p.

9. Sea $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$. Si existe $g \in \mathcal{L}(\mu)$ tal que $g \leq f$ entonces $f$ es semiintegrable y $\int_\Omega g \leq \int_\Omega f$.

**Definición** Para $f \in \mathcal{L}(\mu)$ definamos $\|f\|_1 := \int_\Omega |f|$.

10. Sean $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumple entonces $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ y $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$.

11. Sea $\chi_n$ la función característica del intervalo $[n, n+1)$ y $f_n := \frac{1}{n}\chi_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
i) Encuentra $\lim_{n\to\infty} f_n$. ii) Verifica que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n$.
iii) Prueba que no existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ c.t.p.
iv) ¿ Qué indica lo anterior respecto al teorema de convergencia dominada?

Para revisar y entregarse el jueves 14 de octubre, 2021.