El teorema fundamental del Cálculo con la integral de Lebesgue

Fernando Galaz Fontes
CIMAT

Noviembre 7, 18, 2009
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
U. Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia, Michoacán

1. Introducción

El teorema fundamental del Cálculo consta de dos partes:
i) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = f(x), \ \forall\, x \in [a, b].$$

ii) Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua, entonces

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(s)ds, \ \forall\, x \in [a, b].$$

La integral anterior es la integral de Riemann. Si esta integral se extiende a una clase más amplia de funciones, es natural esperar que el teorema fundamental del Cálculo también. A continuación veremos cómo se logra ésto.

2. Medida de Lebesgue

En 1901 Henri Lebesgue construyó la integral que lleva su nombre y que generalizó la integral definida por Bernhard Riemann en 1854 [5, 6, 8]. Su punto de partida fue el encontrar una clase amplia de conjuntos que se pudieran medir y llamados por ello "medibles". La presentación que seguiremos es equivalente con la de Lebesgue y fue establecida por Constantin Carathéodory en 1918 [3,5]. Respecto a la de Lebesgue, tiene la ventaja de que se puede generalizar con mayor facilidad y explicar más rápidamente.

Consideremos $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Naturalmente, la medida del intervalo abierto $I = (a, b)$ es

$$m(I) \equiv b - a.$$

Definición 1 La *medida exterior* de $A \subset \mathbb{R}$ es

$$m^*(A) \equiv \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones de intervalos abiertos $I_n,\ n \in \mathbb{N}$, tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Las siguientes propiedades de la medida exterior son muy útiles:
1) $0 \ \leq m^*(E) \leq \infty$.
2) (Monotonía) Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.
3) (σ-subaditividad) Si $A_n \subset \mathbb{R}$, entonces $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Definición 2 Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es *medible*, si

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E), \ \forall\, A \subset \mathbb{R}.$$

En este caso su medida es $m(E) \equiv m^*(E)$.

A continuación indicamos las propiedades básicas de los conjuntos medibles [1,2,4].

Teorema 1
i) $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos medibles.
ii) Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible, entonces E^c medible.
iii) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos medibles, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es medible.
iv) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos medibles disjuntos, entonces

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

v) Si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, entonces U es medible.

Observación 1 Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $m^*(A) < \infty$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un abierto U tal que $A \subset U$ y $m(U) < m^*(A) + \epsilon$.

Demostración A partir de la hipótesis se obtiene una colección $\{I_n\}$ de intervalos abiertos acotados tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < m^*(A) + \epsilon$. Tomando $U \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ se cumple lo afirmado. $\square$

Conjuntos de medida cero

Definición 3 Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tiene *medida cero* si $m^*(E) = 0$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe una colección de intervalos abiertos $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \epsilon.$$

Si $E \subset \mathbb{R}$ y $m^*(E) = 0$, es sencillo verificar que E es medible. Además:

1) Si $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ tienen medida cero, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ tiene medida cero.

2) $m(\{p\}) = 0, \ \forall\, p \in \mathbb{R}$.

3) Si E es numerable, entonces $m(E) = 0$. En particular, el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales tiene medida cero.

Lema de recubrimiento de Vitali

Demostraremos a continuación un teorema establecido por Giuseppe Vitali en 1908 [10]. Éste indica que de cierta clase de cubiertas (llamadas ahora de Vitali) de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se puede extraer una subcolección numerable y formada por conjuntos ajenos, que cubre a A excepto por un conjunto de medida cero. La prueba que presentaremos es debida a Stefan Banach [9, p. 335].

Sea $\mathcal{C}$ una colección de intervalos cerrados y acotados, cada uno de longitud positiva. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta de Vitali* de $A \subset \mathbb{R}$ si, para cada $x \in A$ y para cada $\epsilon > 0$ existe un intervalo $I \in \mathcal{C}$ tal que $x \in I$ y $m(I) \leq \epsilon$.

Ejemplo 1 La colección $\mathcal{C}$ formada por todos los intervalos $[a, b]$ donde a, b son números racionales y $a < b$, es una cubierta de Vitali de $\mathbb{R}$.

Observación 2 Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta de Vitali de $A \subset \mathbb{R}$ y que $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Entonces

$$\mathcal{C}_U \equiv \{I \in \mathcal{C} : I \subset U\}$$

es una cubierta de Vitali de $A \cap U$. En particular, si $A \subset U$, entonces $\mathcal{C}_U$ es una cubierta de Vitali de A.

Demostración Consideremos $x \in A \cap U$ y $\epsilon > 0$. Puesto que U es abierto, existe $r > 0$ tal que $r \leq \epsilon$ y $[x - r, x + r] \subset U$. Usando ahora la hipótesis obtenemos un intervalo $I \in \mathcal{C}$ tal que $m(I) \leq r$ y $x \in I$. Luego, si $y \in I$ se cumple que

$$|x - y| \leq r.$$

Esto indica que $I \in \mathcal{C}_U$. $\square$

Lema 1 (de recubrimiento de Vitali) *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $m^*(A) < \infty$ y $\mathcal{C}$ es una cubierta de Vitali de A, entonces existe una colección numerable $\widetilde{\mathcal{C}} = \{I_\ell : \ell \in L\} \subset \mathcal{C}$ de intervalos disjuntos tal que*

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{\ell \in L} I_\ell\right) = 0. \tag{1}$$

Además, para cada $\epsilon > 0$ existe una colección finita $\{I_1, \cdots, I_n\} \subset \mathcal{C}_0$ tal que

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell\right) \leq \epsilon. \tag{2}$$

Demostración Fijemos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $m(U) < \infty$ y $A \subset U$. Asímismo, supondremos que $I \subset U$, $\forall\, I \in \mathcal{C}$.

Definiremos los intervalos I_ℓ procediendo inductivamente. Como I_1 tomemos cualquier $I \in \mathcal{C}$. Supongamos en seguida que ya se eligió una colección de intervalos disjuntos $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{C}$. Si $A \subset \cup_{\ell=1}^{n} I_\ell$ la conclusión es clara. De lo contrario, consideremos el conjunto

$$\mathcal{C}_n \equiv \{I \in \mathcal{C} : I \cap (\cup_{\ell=1}^{n} I_\ell) = \emptyset\}.$$

y definamos

$$k_n \equiv \sup\{m(I) : I \in \mathcal{C}_n\}.$$

Como $\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell \subset U$ es cerrado, a partir de la observación anterior resulta que $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$. Luego, $0 < k_n < \infty$. Tomamos ahora como I_{n+1} cualquier intervalo en $\mathcal{J}_n$ tal que

$$m(I_{n+1}) > \frac{1}{2} k_n. \tag{3}$$

Si el procedimiento anterior termina en algún "paso" n, la conclusión es clara. De lo contrario, se obtiene una colección $\{I_\ell : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ de intervalos disjuntos. Probaremos ahora (2).

Sea $\epsilon > 0$. Ya que $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell \subset U$, se cumple que $\sum_{\ell=1}^{\infty} m(I_\ell) \leq m(U) < \infty$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\ell=n+1} m(I_\ell) \leq \frac{\epsilon}{5}.$$

Sea $x \in B \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell)$. Como $\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell$ es cerrado, existe $I \in \mathcal{C}_n$ tal que $x \in I$. Si $I \cap I_\ell = \emptyset \; \forall \, \ell = n+1, \ldots$, a partir de (3) resulta que $m(I_\ell) \geq \frac{m(I)}{2} > 0$, $\forall \, \ell = n+1, \ldots$. Esto implicaría que $\sum_{\ell=1}^{\infty} m(I_\ell) = \infty$, lo cual no es posible. Tomemos entonces N como el menor natural tal que $I \cap I_N \neq \emptyset$. Observemos que $N \geq n+1$ y

$$m(I) \leq k_{N-1} \leq 2m(I_N).$$

Fijemos $p \in I \cap I_N$ y sea p_N el punto medio de I_N. Entonces, cuando $x \in I$ se cumple

$$|x - p_N| \leq |x - p| + |p - p_N| \leq m(I) + \frac{m(I_N)}{2} \leq \frac{5}{2} m(I_N).$$

Esto indica que x pertenece al intervalo J_N, cuyo punto medio es p_N y de longitud total $5m(I_N)$. Así, $A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell) \subset \cup_{\ell=n+1}^{\infty} J_\ell$. Por lo tanto,

$$m^* \left(A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell) \right) \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} m(J_\ell) = 5 \sum_{\ell=n+1}^{\infty} m(I_\ell) \leq \epsilon.$$

Como $A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell) \subset A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell)$, de lo recién establecido se sigue que $m^* \left(A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell\right) \leq \epsilon$. Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, se obtiene (1). □

3. Integral de Lebesgue

En adelante, $E \subset \mathbb{R}$ es siempre un conjunto medible, lo mismo que $A \subset E$.

Definición 4
a) Una función $f : E \to \mathbb{R}^*$ es *medible*, si para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{x \in E : f(x) < t\}$$

es medible.

b) Dos funciones $f, g : E \to \mathbb{R}^*$ son *iguales en casi todas partes*, si

$$m(\{x \in E : f(x)) \neq g(x)\}) = 0.$$

En este caso escribimos $f = g$ c.t.p.

Teorema 2 *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $f, g, f_n : E \to \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
i) Si f y g son medibles, entonces $f + g$ y λf también lo son.
ii) Si cada f_n es medible y $f_n \to f$, entonces f es medible.
iii) Si f es medible y $g = f$ c.t.p., entonces g es medible.

Definición 5
a) La *función característica* de $A \subset E$ es

$$\chi_A(x) = 1 \text{ si } x \in A, \ \chi_A(x) = 0 \text{ si } x \in E \setminus A.$$

b) Una función *simple medible* $s : E \to \mathbb{R}$ es una de la forma

$$s(x) = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_n\chi_{E_n},$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $E_1, \ldots, E_n \subset E$ son medibles. Su *integral* es

$$\int_E s \equiv a_1 m(E_1) + \cdots + a_n m(E_n).$$

c) La *integral* de una función medible y no-negativa $f : E \to \mathbb{R}^*$, es

$$\int_E f \equiv \sup\left\{\int_E s : s \text{ es simple medible}, 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Dada $f : E \to \mathbb{R}$, definamos f_+ y f_- por

$$f_+(x) \equiv \max\{f(x), 0\}, \ f_-(x) \equiv \max\{-f(x), 0\}.$$

A f_+ se le llama la *parte positiva* de f y f_- es su parte *parte negativa.*
Es sencillo verificar que:
1) $f = f_+ - f_-$.
2) f es medible si, y sólo si, f_+ y f_- lo son.

Definición 6 Un función medible $f : E \to \mathbb{R}^*$ es *integrable*, si f_+ y f_- lo son. En este caso

$$\int_E f \equiv \int_E f_+ - \int_E f_-.$$

En adelante denotaremos por $\mathcal{L}(E)$ el conjunto formado por las funciones $f : E \to \mathbb{R}$ que son integrables.

Las siguientes son propiedades básicas de la integral de Lebesgue.

Teorema 3
i) (Linealidad) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *y* $k \in \mathbb{R}$*, entonces* $f+g,\ kf \in \mathcal{L}(E)$ *y*

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g, \ \int_E kf = k \int_E f.$$

ii) Sea $f : E \to \mathbb{R}^*$ *medible. Entonces,* $f \in \mathcal{L}(E)$ *si, y sólo si,* $|f| \in \mathcal{L}(E)$.
iii) (Aditividad respecto al dominio de integración) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una colección de subconjuntos medibles disjuntos, y* f *es integrable en* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$*, entonces*

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

iv) Si $g = f$ *c.t.p. y* $f \in \mathcal{L}(E)$*, entonces* $g \in \mathcal{L}(E)$ *y* $\int_E g = \int_E f$.
v) (Monotonía) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *y* $f \leq g$*, entonces* $\int_E f \leq \int_E g$.
i) Si $f \in \mathcal{L}(E)$*, entonces el conjunto* $\{x : |f(x)| = \infty\}$ *tiene medida cero.*

Teorema 4 (Lema de Fatou) *Sea* $f_n : E \to [0, \infty], \forall\, n \in \mathbb{N}$*, una sucesión de funciones medibles. Si* $f_n \to f$ *c.t.p., entonces*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

4. Derivabilidad c.t.p.

Sabemos que una función continua, definida en un intervalo, puede no ser derivable. Por ejemplo, la función valor absoluto

$$V(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R},$$

no es derivable en $x = 0$. A partir de ella podemos, sin dificultad, construir una función que no sea derivable en n puntos distintos.

Durante gran parte del siglo XIX se pensó que la continuidad implicaba derivabilidad, excepto en “pocos”puntos. Causando gran sorpresa, en 1872 Karl Weierstrass construyó una función continua que en ningún punto es derivable [11]. Esto condujo a dejar de lado la continuidad y buscar otra propiedad que implicara lo buscado. Con la introducción de la medida de Lebesgue, se busca que "pocos"puntos signifique que el conjunto donde la función no sea derivable tenga medida cero.

Sorprendentemente, la propiedad clave para resolver la cuestión planteada resultó ser la de monotonía.

5. Funciones monótonas

En todo lo que sigue, cuando no se indique otra cosa, I será siempre un intervalo con más de un punto. Cuando $I = (a, b)$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}^*$ y $a < b$. El conjunto de puntos interiores de I se denotará por I^0.

Definición 7 Sea $f : I \to \mathbb{R}$.

a) f es *monótona-creciente*, si

$$w, x \in I,\ w < x \Rightarrow f(w) \leq f(x).$$

b) f es *monótona-decreciente*, si

$$w, x \in I,\ w < x \ \Rightarrow \ f(w) \geq f(x).$$

c) f es *monótona*, si es monótona-creciente o monótona-decreciente.

Ejemplo 2 Sea $f : [a, b] \to [0, \infty]$ una función integrable y definamos $F(x) \equiv \int_a^x f,\ a \leq x \leq b$. Consideremos $a \leq w < x \leq b$. Empleando el teorema 3, resulta

$$F(x) - F(w) = \int_a^x f - \int_a^w f = \int_w^x f \geq 0.$$

Lo cual indica que F es una función monótona-creciente.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y $p \in I$. Cuando los límites laterales correspondientes existan, usaremos la notación

$$f(p^+) = \lim_{x \to p^+} f(x), \quad f(p^-) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Lema 2 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente.*

i) Si $p \in I^0$, entonces existen $f(p^-)$ y $f(p^+)$. Además, si $w, x \in I$ y $p \in (w, x)$, entonces

$$f(w^+) \ \leq f(p^-) \ \leq f(p) \ \leq f(p^+) \ \leq f(x^-). \tag{4}$$

ii) Si $a, b \in I$ y $a \leq w_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq w_n \leq x_n \leq b$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(w_j)) \leq f(b) - f(a).$$

Demostración i) Probaremos que

$$f(p^-) = \sup\{f(q) : q \in I, q < p\}. \tag{5}$$

$$f(p^+) = \text{ínf}\{f(q) : q \in I : p < q\}. \tag{6}$$

Tomemos $A \equiv \{q \in I : q < p\}$. Como f es monótona-creciente, observemos que $f(p)$ es cota superior de $f(A)$. Luego, $s \equiv \sup f(A) \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$. Por la definición de s, existe $q_0 \in A$ tal que $s - \epsilon < f(q_0)$. Tomemos $\delta \equiv p - q_0 > 0$. Ya que f es monótona-creciente, se cumple

$$s - \epsilon < f(q) \leq s, \quad \text{si } q_0 = p + \delta < q < p.$$

Esto prueba (5). La prueba de (6) es análoga.

Estableceremos ahora las desigualdades señaladas en (4). Usando que f es monótona-creciente, de (5) se obtiene que $f(p^-) \leq f(p)$, y de (6) resulta que $f(p^+) \geq f(p)$. Consideremos ahora $w \in I,\ w < p$. Empleando (5) y (6) encontramos que

$$\begin{aligned} f(w^+) = \text{ínf}\{f(q) : q \in I,\ w < q\} &= \text{ínf}\{f(q) : q \in I, w < q < p\} \\ &\leq \sup\{f(q) : w < q < p\} = f(p^-). \end{aligned}$$

La desigualdad $f(p^+) \leq f(x^-)$ se demuestra de forma similar.

ii) Sean $a, b \in I$ y $a \leq w_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq w_n \leq x_n \leq b$. Siendo f monótona creciente, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(w_j)) &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_{n-j+1} - f(w_{n-j+1})) \\ &= f(x_n) - \sum_{j=1}^{n-1} (f(w_{j+1}) - f(x_j)) - f(w_1) \\ &\leq f(x_n) - f(w_1) \leq f(b) - f(a). \quad \square \end{aligned}$$

Observación 3 Naturalmente, si $g : I \to \mathbb{R}$ es una función monótona-decreciente se tiene un resultado correspondiente al anterior. Dejamos al lector su enunciado.

Teorema 5 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Si f es monótona, entonces el conjunto de sus discontinuidades es numerable (finito o contable).*

Demostración Denotemos por D el conjunto de discontinuidades de f. Supongamos que $x \in D$. Luego $f(x^+) - f(x^-) > 0$, por lo cual podemos elegir $q_x \in \mathbb{Q} \cap (f(x^-), f(x+))$. Usando ahora el lema 1 se sigue que la correspondencia de D en QQ definida por $x \to q_x$ es 1-1. Esto permite concluir que D es numerable .

Supongamos ahora que f es monótona-decreciente. Entonces la función $-f$ es monótona-creciente y tiene las mismas discontinuidades que f. Aplicando lo recién establecido, se sigue que el conjunto de discontinuidades de f es numerable. $\square$

6. Derivada de una función monótona

En 1904 Lebesgue estableció que si f es una función monótona continua, entonces f es derivable c.t.p. [7]. Siete años después William Henry Young probó que la condición de continuidad no se requiere [9, p. 206], como se apreciará en esta sección.

Los siguientes conceptos desempeñan para una función un papel semejante al que el $\liminf$ y el $\limsup$ tienen respecto a una sucesión.

Definición 8 Sea I un intervalo, $g : I \to \mathbb{R}$ y $p \in I^0$. Entonces

a) $\limsup_{h\to p^+} g(h) \equiv \inf_{\delta>0} \sup\{g(h) : 0 < h - p < \delta\}$.

b) $\liminf_{h\to p^+} g(h) \equiv \sup_{\delta>0} \inf\{g(h) : 0 < h - p < \delta\}$.

c) $\limsup_{h\to p^-} g(h) \equiv \inf_{\delta>0} \sup\{g(h) : 0 < p - h < \delta\}$.

d) $\liminf_{x\to p^-} g(h) \equiv \sup_{\delta>0} \inf\{g(h) : 0 < p - h < \delta\}$.

Observemos que

$$\liminf_{h\to p^-} g(h) \leq \limsup_{h\to p^-} g(h), \;\; \liminf_{h\to p^+} g(h) \leq \limsup_{h\to p^+} g(h). \tag{7}$$

Sea $L \in \mathbb{R}^*$. Como en el caso del límite de una sucesión, la igualdad $\lim_{x\to p} g(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}^*$, equivale a

$$\limsup_{h\to p^+} g(h) = \liminf_{h\to p^+} g(h) = \limsup_{h\to p^-} g(h) = \liminf_{h\to p^-} g(h) = L.$$

Ejemplo 3 Sea χ la función característica de $\mathbb{Q}$ y $p \in \mathbb{R}$. Puesto que en cada intervalo abierto no vacío hay números racionales, resulta

$$\limsup_{h \to p^+} \chi(h) \equiv \inf_{\delta > 0} \sup\{\chi(h) : 0 < h - p < \delta\} = \inf_{\delta > 0}\{1\} = 1.$$

Asímismo, se cumple que

$$\liminf_{h \to p^+} \chi(h) = 0, \ \limsup_{h \to p^-} \chi(h) = 1, \ \liminf_{h \to p^-} \chi(h) = 0.$$

El siguiente ejemplo ilustra el uso de los conceptos anteriores y muestra cómo las cubiertas de Vitali aparecen de forma natural.

Ejemplo 4 Sea $g : I \to \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}$.
1) Consideremos el conjunto

$$A \equiv \{p \in I : v < \limsup_{h \to p^+} g(h)\}.$$

y tomemos $p \in A$. Directamente de la definición, se sigue que para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño se cumple que $v < \sup\{g(h) : p < h < p + \delta\}$. Luego, en tal caso podemos encontrar $h \in (p, p + \delta)$ tal que $g(h) > v$. Esto muestra que la colecciónm

$$\mathcal{C} \equiv \{[p, h] : p, h \in I, \ p < h, \ v < g(h)\}$$

es una cubierta de Vitali de A.
2) Consideremos ahora el conjunto

$$B \equiv \{p \in I, \liminf_{h \to p^+} g(h) < u\}.$$

y tomemos $p \in B$. Directamente de la definición, se obtiene que $\inf\{g(h) : p < h < p + \delta\} < u$ para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Luego, en tal caso es posible encontrar $h \in (p, p + \delta)$ tal que $g(h) < u$. Esto muestra que la colección

$$\mathcal{C} \equiv \{[p, h] : p, h \in I, \ p < h, \ g(h) < u\}$$

es una cubierta de Vitali de B.

Usaremos en seguida los conceptos anteriores para estudiar el cociente de incrementos en x de f: función

$$g(h) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \ h \neq 0.$$

Definición 9 Sea I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $x \in I^0$. Definimos:
a) La *derivada superior derecha* en x como

$$D^+ f(x) \equiv \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

b) La *derivada inferior derecha* en x como

$$D_+ f(x) \equiv \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(p)}{h}.$$

c) La *derivada superior izquierda* en x como

$$D^- f(x) \equiv \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

d) La *derivada inferior izquierda* en x como

$$D_- f(x) \equiv \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ = \ \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

En los resultados que estableceremos a continuación requerimos saber que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ tiene también las siguientes propiedades.

Teorema 6 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Entonces*
i) $-E$ y $E+y, \forall\, y \in \mathbb{R}$, son conjuntos medibles. Además,

$$m(-E) = m(E) = m(E+y), \ \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

ii) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ y $y \in \mathbb{R}$, entonces $g(s) \equiv f(s+y) \in \mathcal{L}(E-y)$ y

$$\int_{E-y} f(y+s)ds = \int_E f.$$

Lema 3 *Si para cualquier función monótona creciente $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ se cumple que $D^+ g \leq D_- g$ c.t.p., entonces para cualquier función monótona-creciente $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se cumple*

$$0 \leq D^+ f = D_+ f = D^- f = D_- f \ \ c.t.p.$$

Demostración Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente. Se cumple entonces $0 \leq D^+ f$ y resta probar que

$$D^+ f \ \leq D_- f \ \leq D^- f \ \leq D_+ f \ \leq D^+ f \text{ c.t.p.}$$

La primera de las desigualdades anteriores se cumple por hipótesis. La segunda y la cuarta se cumplen para cualquier función. Así, sólo falta establecer la tercera desigualdad:

$$D^- f \ \leq D_+ f \text{ c.t.p.} \tag{8}$$

Definamos la función g por $g(x) \equiv -f(-x)$, $\forall\, x \in [-b, -a]$. Notemos que g sigue siendo monótona-creciente. Sea $h > 0$. Observando que

$$\begin{aligned} \frac{g(-x+h) - g(x)}{h} &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ \frac{g(-x) - g(-x-h)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \end{aligned}$$

resulta que $D^+ g(-x) = D^- f(x)$ y $D_- g(-x) = D_+ f(x)$. Haciendo uso del teorema anterior y de la hipótesis se obtiene (8). $\square$

Teorema 7 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es monótona-creciente, entonces f es derivable c.t.p. Además, $f' \geq 0$ c.t.p., f' es medible y*

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a).$$

Demostración Sea $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente. En virtud del lema anterior, probaremos primero que el conjunto

$$E \equiv \{x \in (c, d) : D_- g(x) < D^+ g(x)\} \text{ tiene medida cero.} \tag{9}$$

Para cada $u, v \in \mathbb{Q}$ consideremos el conjunto

$$E_{u,v} \ \equiv \ \{x \in (c, d) : D_- g(x) < u < v < D^+ g(x)\}.$$

Como la colección de estos conjuntos $E_{u,v}$ es numerable y E es la unión de ellos, para concluir que $m(E) = 0$ basta probar que $m^*(E_{u,v}) = 0$, $\forall\, u, v \in \mathbb{Q}$.

Sean $u, v \in \mathbb{Q}$. A continuación construiremos dos cubiertas de Vitali para el conjunto $E_{u,v}$. Consideremos $x \in E_{u,v}$. Entonces

$$u > D_{-}g(x) = \sup_{\delta>0} \text{ínf} \left\{ \frac{g(x) - g(x-h)}{h} : 0 < h < \delta \right\}. \tag{10}$$

Luego, $u > \text{ínf}\{\frac{g(x)-g(x-h)}{h} : 0 < h < \delta\}$, para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto implica que existen números h que son positivos y arbitrariamente pequeños tales que $[x-h, x] \subset (c, d)$ y $g(x) - g(x-h) < uh$. Notemos que la colección $\mathcal{C}_u$ de los intervalos correspondientes $[x-h, x]$ es una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$.

Como $x \in E_{u,v}$ también se cumple que

$$v < D^{+}g(x) = \text{ínf}_{\delta>0} \sup \left\{ \frac{g(x+k) - g(x)}{k} : 0 < k < \delta \right\}. \tag{11}$$

Luego, $v < \sup\left\{\frac{g(x+k)-g(x)}{k} : 0 < k < \delta\right\}$ para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto implica que existen números k que son positivos y arbitrariamente pequeños tales que $[x, x+k] \subset (c, d)$ y $vk < g(x+k) - g(x)$. Notemos que la colección $\mathcal{C}_v$ de los intervalos correspondientes $[x, x+k]$ es una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$.

Sea $\mu \equiv m^*(E_{u,v})$. Para establecer que $\mu = 0$, consideremos $\epsilon > 0$. Elijamos después un conjunto abierto $W \subset (c, d)$ tal que $E_{u,v} \subset W$ y $m(W) < \mu + \epsilon$. Hemos visto que la subcolección de $\mathcal{C}_u$ formada por aquellos intervalos contenidos en W forman una cubierta de Vitali para $E_{u,v}$. Luego, aplicando el lema 1 junto con el lema de recubrimiento de Vitali se obtiene una familia finita de intervalos disjuntos $I_r \equiv [x_r - h_r, x_r]$, $r = 1, \ldots, n$, que están contenidos en W y cumplen que $m^*(E_{u,v} \setminus \bigcup_{r=1}^{n} I_r) \leq \epsilon$. Hagamos $A \equiv E_{u,v} \cap (\bigcup_{r=1}^{n} I_r)$. Entonces, por la subaditividad de m^*, resulta

$$m^*(A) \geq \mu - m^*(E_{u,v} \setminus \bigcup_{r=1}^{n} I_r) \geq \mu - \epsilon.$$

Por la definición de los números $h > 0$, observemos que al sumar sobre estos intervalos, se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} (g(x_r) - g(x_r - h_r)) \leq u \sum_{r=1}^{n} h_r \leq u\, m(W) \leq u\,(\mu + \epsilon). \tag{12}$$

Por otra parte, sea A_0 el subconjunto de A que consiste de aquellos puntos que no son extremo de alguno de los intervalos $I_1, \ldots, I_n$. La subcolección de $\mathcal{C}_v$ formada por aquellos intervalos contenidos en $\bigcup_{r=1}^{n} I_r^0$ forma entonces una cubierta de Vitali de A_0. De esta subcolección, usando nuevamente el lema 1 junto con el lema de recubrimiento de Vitali, podemos elegir una familia finita de intervalos disjuntos $J_s \equiv [y_s, y_s + k_s], \quad s = 1, \ldots, N$, que están contenidos en $\bigcup_{j=1}^{n} I_j^0$ y tales que

$$m^*(A \setminus \bigcup_{s=1}^{N} J_s) = m^*(A_0 \setminus \bigcup_{s=1}^{N} J_s) \leq \epsilon.$$

Tomemos $B \equiv A \cap (\bigcup_{s=1}^{N} J_s)$. Entonces

$$m^*(B) \geq m^*(A) - \epsilon \geq \mu - 2\epsilon.$$

Luego, al sumar sobre todos estos intervalos resulta

$$\sum_{s=1}^{N} (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \geq v \sum_{s=1}^{N} k_s \geq v m^*(B) \geq v\,(\mu - 2\epsilon). \qquad (13)$$

Observemos que cada intervalo J_s está contenido en algún intervalo I_r. Así, para cada $r = 1, \ldots, n$, al sumar sobre aquellos s tales que $J_s \subset I_r$ y utilizar el lema 2 , se obtiene

$$\sum_{J_s \subset I_r} (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \leq g(x_r) - g(x_r - h_r).$$

Por lo tanto

$$\sum_{s=1}^{N} (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \leq \sum_{r=1}^{n} \left(g(x_r) - g(x_r - h_r)\right). \qquad (14)$$

De acuerdo con (12)-(14), esto implica $v(\mu - 2\epsilon) \leq u(\mu + \epsilon)$. Haciendo $\epsilon \to 0$, resulta $v\,\mu \leq u\,\mu$. Ya que $u < v$, concluimos que $\mu = 0$.

De (9) y el lema 3 se sigue que

$$k(x) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

está definida c.t.p. en $[a, b]$, aunque pudiera tomar a ∞ como valor. Por lo tanto, f será derivable cuando k sea finita.

Hagamos

$$k_n(x) \equiv n(f(x+\frac{1}{n})-f(x)),\ \forall\, x\in[a,b],$$

donde $f(t)=f(b)$ cuando $t>b$. Ya que f es medible, también lo es la función $x \to f(x+\frac{1}{n})$. Esto implica que k_n también es medible. Puesto que $k_n \to k$ c.t.p., se sigue que k es medible. Además, siendo f monótona-creciente, se cumple que $k_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando el lema de Fatou, se concluye que

$$\int_a^b k \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b k_n = \liminf_{n\to\infty} n\int_a^b \left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right). \tag{15}$$

Usando ahora el teorema 6, resulta

$$\int_a^b f(x+\frac{1}{n})\ -\int_a^b f = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^b f = \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \leq \frac{f(b)}{n} - \frac{f(a)}{n}.$$

Empleando esto en (15), se obtiene que $\int_a^b k \leq f(b)-f(a)$. Esto indica que k es integrable y, por consiguiente, k es finita c.t.p. Por lo tanto, f es derivable c.t.p. y $k=f'$ c.t.p. $\square$

7. Derivación de una integral

Dada una función integrable $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, definamos la función

$$F(x) \equiv \int_a^x f,\ \ a\leq x\leq b.$$

A continuación estudiaremos la función F. El siguiente resultado se puede probar como en el caso de la integral de Riemann.

Lema 4 *Sea $p\in[a,b]$. Si f es continua en p, entonces $F'(p)=f(p)$.*

Según lo establecido en el ejemplo 2 las funciones

$$F_1(x) \equiv \int_a^x f_+,\ \ F_2(x) \equiv \int_a^x f_,\ a\leq x\leq b$$

son monótonas-crecientes. Aplicando el teorema 7, concluimos que F_1 y F_2 son derivables c.t.p. Luego, también lo es $F\equiv F_1-F_2$. Además, de dicho teorema se sigue también que la derivada de F es integrable en $[a,b]$. Definamos

$$Lf(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{cuando exista} \\ 0, & \text{cuando no exista} \end{cases}.$$

Para establecer que $Lf = f$ c.t.p. utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 5 $\int_a^b |Lf| \leq \int_a^b |f|, \ \forall f \in \mathcal{L}[a,b]$.

Demostración Notemos que

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \text{ c.t.p.}, \quad F_1'(x) \geq 0, \ F_2'(x) \geq 0 \text{ c.t.p..}$$

Luego, $|F'| \leq F_1' + F_2'$ c.t.p. y, por lo tanto,

$$\int_a^b |F'| \leq \int_a^b F_1' + \int_a^b F_2'.$$

De aquí, al usar el teorema 7 resulta

$$\int_a^b |F'| \leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-'.$$

Ya que $|f| = f_+ + f_-$, esto implica lo deseado. $\square$

Teorema 8 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) \equiv \int_a^x f$. Entonces F es derivable c.t.p. y $F' = f$ c.t.p..*

Demostración Consideremos $C[a,b]$, el conjunto de funciones continuas $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. A continuación emplearemos que $C[a,b]$ es denso en $\mathcal{L}(E)$.

Elijamos ahora una sucesión $\{f_n\}C[a,b]$ tal que $\int_a^b |f - f_n| \to 0$. Por el lema 4, $Lf_n = f_n$. Asímismo, notemos que $L(f_n - f) = Lf_n - Lf = f_n - Lf$ c.t.p.. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - Lf| &\leq \int_a^b |f - f_n| + \int_a^b |f_n - Lf| \\ &= \int_a^b |f - f_n| + \int_a^b |L(f_n - f)|, \\ &\leq 2\int_a^b |f - f_n|, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Haciendo ahora $n \to \infty$ resulta $|f - Lf| = 0$ c.t.p.. De aquí se obtiene la conclusión. $\square$

8. Bibliografía

1. E. Asplund y L. Bungart, *A first course in integration.* Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1966.

2. J. C. Burkill, *The Lebesgue integral.* Cambridge University Press, London, 1951.

3. C. Carathéodory, *Vorlesungen ber reelle Funktionen*, 1st ed, Berlin: Leibzig 1918, 2nd ed, New York: Chelsea 1948.

4. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. Oxford University Press México, 2002.

5. F. Galaz García, 'Definiciones originales de la integral y la medida de Lebesgue'. *Miscelánea Matemática* SMM, 44(2007), 83-100.

http://www.math.umd.edu/˜galazg/comentarios_lebesgue.pdf

6. H. Lebesgue, 'Sur une généralisatione de líntérale définie'. Ac. Sci. C. R. **132**(1901), 1025-1028.

7. H. Lebesgue, *Leçons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

8. B. Riemann, 'Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe'. Werke, 1854.

9. K. R. Stromberg, *An introduction to classical real analysis.* Wadsworth Inc., Belmont, California, 1981.

10. G. Vitali, 'Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali'. Atti Accad. Sci. Torino **43**(1908), 7592.

11. K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Band 2, Abhandlungen II.