OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 1

A continuación V, W y Z siempre son espacios vectoriales y X, Y son espacios normados.

Definición Una función $B : V \times W \to Z$ es *bilineal* si, para cada $v_0 \in X$ y $w_0 \in Y$, las funciones $w \to B(v_0, w)$ y $v \to B(v, w_0)$ son lineales.

1. Prueba que las funciones bilineales $B : X \times Y \to Z$, con las operaciones usuales entre funciones, forman un espacio vectorial.

2. Si $1 \leq p < \infty$ y $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, prueba que $\sum_{j=1}^{n} a_j^p \leq (\sum_{j=1}^{n} a_j)^p$.

3. Si $V \subset X$ es un subespacio vectorial, prueba que $\overline{A}$ también lo es.

4. Sean $T, T_n : V \to Y, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si cada T_n es un operador lineal y $T_n \to T$, prueba que T también es lineal.

5. Si $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión convergente, prueba que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

6. Sean M y N espacios métricos. Si $f : M \to N$ es uniformemente continua, prueba que f preserva sucesiones de Cauchy.

7. Sean X y Y espacios normados. Entonces, con las operaciones definidas por componentes, $X \times Y$ es un espacio vectorial. Prueba que la función definida por $\|(x, y)\| := \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$ es una norma en $X \times Y$. (Ésta será la norma que tomaremos en $X \times Y$ cuando lo consideremos como espacio normado.)

8. Señala un espacio normado que no sea completo.

9. Señala un operador lineal entre espacios normados que no sea continuo.

10. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces, T es una isometría si, y sólo si, T preserva la norma, esto es $\|Tx\| = \|x\|,\ \forall\, x \in X$.

11. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Prueba que T no es acotado si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \to 0$ y $\|Tx_n\| = 1$.

12. Prueba que $\|T\| = \sup\{|\ \langle Tx, \varphi\rangle\ | : \|x\| \leq 1, \|\varphi\| \leq 1\}, \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$.