OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 2

1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Prueba que $\sum_{j=1}^{n} a_j^p \geq (\sum_{j=1}^{n} a_j)^p, 0 < p < 1$.

2. Si $1 \leq p < r \leq \infty$, prueba que $\|s\|_r \leq \|s\|_p, \ \forall\, s \in \mathcal{S}(\mathbb{K})$. Concluye que $\ell^p(\mathbb{K}) \subset \ell^r(\mathbb{K})$ y que la inclusión es continua.

3. Sea X el espacio de funciones continuas $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ con periodo 2π, esto es $f(-\pi) = f(\pi)$. Prueba que X, con la norma del supremo, es un espacio de Banach.

A continuación, X, Y y Z siempre son espacios normados y W es un subespacio (vectorial) cerrado de X.

4. Prueba que $\{\{x_n\} \subset X : \{x_n\}$ es de Cauchy$\}$ es un espacio vectorial.

5. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, prueba que $J_Y T = T'' J_X$, donde J_X y J_Y son las identificaciones canónicas correspondientes..

6. Sea $V \subset X$ un subespacio. Prueba que $d(x, V) = d(x, \overline{V}), \ \forall\, x \in X$.

7. Sea $B : X \times Y \to Z$ una función bilineal. Prueba que B es continua si, y sólo si, existe $C > 0$ tal que $\|B(x, y)\| \ \leq \ C\|x\|\|y\|, \ \forall\, (x, y) \in X \times Y$.

8. Sea $V \subset X$ un subespacio. Si V es completo, prueba que V es cerrado.

9. Prueba que la proyección canónica $\pi : X \to X/W$ manda la bola abierta de radio $r > 0$ y centro en el origen de X sobre la bola abierta de radio r y centro en el origen de X/W. Concluye que π preserva abiertos.

10. Sean $V \subset X$ un subespacio y $T : V \to X$ un operador lineal. Si existen $0 \leq a < 1$ y $0 \leq b < 1$ tales que $\|x - Tx\| \ \leq a\|Tx\| + b\|x\|, \forall\, x \in X$, prueba que T es continuo, $1 - 1$ y T^{-1} es continuo.

11. Sea H un espacio de Hilbert. Si $T : X \to H$ es lineal, prueba que

$$\|T\| = \sup\{|\, \langle Tx, y \rangle_H |\colon \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1\}.$$

12. Sean $v \in X$ y $\varphi \in X^*$. Definamos entonces $Tx := \langle x, \varphi \rangle v, \ \forall\, x \in X$. Verifica que $T \in \mathcal{L}(X)$ y encuentra T'.

Para revisar y entregarse el lunes 2 de septiembre, 2013