OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 3

Notación Sean V un espacio vectorial y W, Z subespacios vectoriales de V. Entonces $V = W \dot{+} Z$ indicará que $V = W + Z$ y $W \cap Z = \emptyset$.

1. Si $V = W \dot{+} Z$, prueba que V/W es isomorfo con Z.

A continuación, X, Y siempre son espacios normados.

2. Denotaremos por $SC(X)$ la colección de sucesiones en X que son de Cauchy. Si $\{x_n\} \in SC(X)$, prueba que $\{\|x_n\|\}$ converge. Luego, toda sucesión de Cauchy es acotada.

3. Denotaremos por $R[0,1]$ la colección de funciones $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ que son Riemann-integrables. Observa que $R[0,1]$ es un espacio vectorial y determina si la función $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(s)| ds$ es una norma.

4. Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo topológico y X es completo, prueba que Y también es completo.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si X es separable y T es suprayectivo, prueba que Y es separable.

6. Sean X y Y espacios normados, y $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si $\{T_n\}$ es acotada, $T_n \to 0$ en D y $D \subset X$ es total, prueba que $T_n \to 0$ en X.

7. Sea X un espacio normado de dimensión finita n y $x_1, \ldots, x_n$ una base de X. Prueba que existe $C > 0$ tal que $\sum_{j=1}^n |a_j| \le C \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|$, $\forall\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

8. Si H es un espacio de Hilbert, prueba que la norma en H^* se puede obtener a partir de un producto escalar.

9. Prueba que $\dim X = \dim X^*$.

10. Si $V \subset X$ es un subespacio vectorial, prueba que $V^* = \overline{V}^*$ (mediante una identificación natural).

11. Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ el operador lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas es $A = (a_{i,j}),\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Encuentra la matriz de T' respecto de las bases duales.

12. Sean M un espacio métrico y $C, V \subset M$. Si C es cerrado, V es abierto y $C \subset V$, prueba que existe una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f = 1$ en C, $0 \le f \le 1$, y $f = 0$ en V^c.

Para revisar y entregarse el lunes 9 de septiembre, 2013