OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 4

Definición Dado un espacio vectorial real V, definamos

$$V_{\mathbb{C}} := \{x + iy : x, y \in V\}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

En $V_{\mathbb{C}}$ consideraremos las operaciones definidas por

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(a + ib)(x + iy) := (ax - by) + i(ay + bx), \ a, b \in \mathbb{R}, \ \forall\, x, y \in V.$$

1. Si V es un espacio vectorial real, verifica que $V_{\mathbb{C}}$ es un espacio vectorial complejo. A $V_{\mathbb{C}}$ se le llama la *complejificación de* V.

2. Sean V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Si $\operatorname{codim} W < \infty$, prueba que existe un subespacio $Z \subset V$ tal que $\dim Z = \operatorname{codim} W$ y $V = W \dot{+} Z$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y definamos $\|f\|_1 := \int_a^b |f(s)|ds, \forall\, f \in C[a, b]$. Determina si esta función es una norma en $C[a, b]$.

4. Si D tiene una infinidad de elementos, prueba que $\dim B(D, \mathbb{R}) = \infty$.

A continuación, X y Y siempre son espacios normados.

5. Sea $c_0(X)$ el subconjunto de $SC(X)$ de las sucesiones convergentes a cero.

i) Observa que $c_0(X)$ es un subespacio de $SC(X)$.

ii) Propón una norma en el espacio cociente $SC(X)/c_0(X)$.

6. Sean V un subespacio de X y $T \in \mathcal{L}(V, Y)$. Si Y es completo, prueba que T se puede extender de forma única a $\overline{V}$ y sin aumentar su norma.

7. Sean V y W subespacios de X. Si W es cerrado y $\dim V < \infty$, prueba que $W + V \subset X$ es cerrado. (Sug.: considera el espacio cociente X/W.)

8. Sean $x_1, \ldots, x_n$ elementos linealmente independientes en X. Prueba que existe $r > 0$ tal que si $v_1, \ldots, v_n \in X$ y $\|v_j - x_j\| < r, \ j = 1, \ldots, n$, entonces $v_1, \ldots, v_n$ también son linealmente independientes.

9. Sea $B : Y \times X^* \to \mathcal{L}(X, Y)$, donde $B(y, \varphi) := y \otimes \varphi$, y $(y \otimes \varphi)x := \langle x, \varphi \rangle y$.

i) Encuentra $\|y \otimes \varphi\|, \ \forall\, y \in Y, \varphi \in X^*$.

ii) Verifica que B es una función bilineal continua.

10. Prueba que $\dim R(T) = \dim R(T'), \ \forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$. (Sug.: ten presente que $R(T')$ es isomorfo con $Y^*/N(T')$.)

11. Determina si c_0 y ℓ^1 son topológicamente isomorfos.

12. Si existe un conjunto numerable $A \subset X$ que es total, prueba que X es separable.

Para revisar y entregarse el miércoles 18 de septiembre, 2013