OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 5

1. Sean V y W subespacios vectoriales de Z. Si $\dim W < \infty$, prueba que existe un subespacio $W_0 \subset W$ tal que $V + W = V \dot{+} W_0$.

2. Sea V un espacio vectorial real y W un espacio vectorial complejo. Si $T : V \to W$ es $\mathbb{R}$-lineal, definamos $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ por $T_{\mathbb{C}}(x+iy) := T(x) + iT(y)$. Prueba que $T_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}$-lineal. A $T_{\mathbb{C}}$ se le llama la *complejificación de T*.

A continuación, X y Y son espacios normados, E es un espacio topológico y q es el exponente conjugado de $p \in [1, \infty]$.

3. Sean $\{f_n\} \subset F(E, X)$ y $f \in F(E, X)$. Si cada f_n es continua y $f_n \xrightarrow{u} f$, prueba que f es continua.

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Un función $s : [a, b] \to X$ es *escalonada*, si existe una partición $\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \ldots \leq x_n = b$ de $[a, b]$ tal que s es constante en cada intervalo abierto $I_k := (x_{k-1}, x_k),\ k = 1, \ldots, n$. Denotaremos por $\mathrm{Esc}([a, b], X)$ el conjunto de tales funciones.

4. Prueba que $\mathrm{Esc}([a, b], X)$ es un subespacio de $B([a, b], X)$.

5. Prueba que $C([a, b], X) \subset \overline{\mathrm{Esc}([a, b], X)}$.

6. Sean $s := \{a_n\} \in \ell^\infty$ y $p \in [1, \infty)$. Dada $x = \{b_n\} \in \ell^p$, definamos $T_s x := \{a_n b_n\}$. i) Verifica que $T_s f \in \ell^p$ y $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$. ii) Encuentra $\|T\|$.

7. Si $W \subset X^*$ es un subespacio de dimensión finita, prueba que $({}^\perp W)^\perp = W$. (Sug. observa que $X/{}^\perp W$ y $({}^\perp W)^\perp$ son isomorfos.

8. Sea $p = 1$ o $p = \infty$. Si $a \in \mathcal{S}$ y $as \in \ell^1,\ \forall\, s \in \ell^p$, prueba que $s \in \ell^q$.

9. Prueba que $\mathcal{L}(X, Y)$ tiene un subespacio isométricamente isomorfo a X^*.

10. Sean X un espacio de Banach separable y $\{x_n\}$ un subconjunto denso en B_X. Dada $s = \{a_n\} \in \ell^1$, definamos $x_s := \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. i) Prueba que x_s está bien definido y considera el operador $T : \ell^1 \to X$ definido por $T(s) := x_s$.
ii) Observa que T es lineal y acotado.
iii) Prueba que $T' : X^* \to \ell^\infty$ es una isometría.
iv) Concluye que T es suprayectivo.

11. Sean A y B álgebras. Si $h : A \to B$ es un homomorfismo, prueba:
i) $h(A)$ es una subálgebra de B.
ii) Si A es conmutativa, entonces $h(A)$ es conmutativa.
iii) Si e es elemento identidad en A, entonces $h(e)$ lo es en $h(A)$.

Para revisar y entregarse el lunes 23 de septiembre, 2013