OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 6

1. Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado real. Determina si la función $\|x + iy\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ es una norma en la complejificación $X_{\mathbb{C}}$.

2. Sea H un espacio de Hilbert. Si $A := \{e_n\} \subset H$ es una sucesión ortonormal, describe la cerradura de $\operatorname{espg}(A)$.

A continuación, X es un espacio normado, E es un espacio topológico y q es el exponente conjugado de $p \in [1, \infty]$.

3. (Criterio M de Weierstrass.) Sea $\{f_n\} \subset C(E, X)$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \geq 0$ tal que $\|f_n(x)\| \leq M_n, \forall\, x \in E$, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, prueba que $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ define una función continua.

4. Sean $s \in \operatorname{Esc}([a, b], X)$ y $\mathcal{P} : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ su partición asociada, de manera que s toma el valor constante a_k en cada subintervalo (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$. Definamos entonces $\varphi(s) := \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_k$, donde $\Delta_k := x_k - x_{k-1}$. $k = 1, \ldots, n$. Prueba que φ es un funcional lineal acotado en $\operatorname{Esc}([a, b], X)$ (con la norma del supremo).

5. Sean $1 < p < \infty$ y $a \in \mathcal{S}$. Si $as \in \ell^1$, $\forall\, s \in \ell^p$, prueba que $s \in \ell^q$.

6. Encuentra $(T_s)' \in \mathcal{L}(\ell^q)$, donde $T_s : \ell^p \to \ell^p$ se definió en el ejercicio 5.6.

7. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ y definamos $T : X \to \mathbb{K}^n$ por $Tx := (\varphi_1 x, \ldots, \varphi_n x)$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son linealmente independientes, prueba que T es suprayectiva. (Sug.: Considera T'.)

8. Sea A un álgebra y $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia no vacía de subálgebras de A. Prueba que $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es también una subálgebra de A.

Definición Sea A un álgebra. El *álgebra generada por* $B \subset A$ es $\mathcal{A}(B) := \cap E$, donde la intersección se toma sobre todas las subálgebras $E \subset A$ tales que $B \subset E$. Si A tiene elemento identidad e, definimos el *álgebra con identidad generada por* B como la generada por el conjunto $B \cup \{e\}$.

9. Sea A un álgebra con identidad. i) Prueba que el álgebra con identidad generada por $x \in A$, es $\mathcal{P}(x) := \{P(x) : P \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\}$ y que ésta álgebra es conmutativa. ii) Describe el álgebra generada por $x \in A$.

10. Si A es una matriz de orden n (con entradas en $\mathbb{K}$), prueba que existe un polinomio P tal que $P(A) = 0$.

11. Dado $r > 0$, tomemos $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Si $f \in H(D_r)$ y $\|T\| < r$, indica cómo se puede definir $f(T)$. (Justifica tu respuesta.)

Definición Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un conjunto $M \subset A$ es un *ideal* (bilateral) si cumple: $0 \in M$; si $x, y \in M$, entonces $x + y \in M$; si $x \in M$, entonces $-x \in M$; si $y \in A, x \in M$, entonces $xy,\ yx \in M$.

12. Sean A un álgebra y $M \subset A$. i) Prueba que M es un ideal si, y sólo si, M es una subálgebra de A y si $x \in M,\ y \in A$, se cumple que $xy,\ yx \in M$.

Para revisar y entregarse el lunes 30 de septiembre, 2013