OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 7

1. Sea X un espacio normado real. Prueba que la función

$$\|x+iy\| := \sup\{|x\cos t - \operatorname{sen} t y| : t \in [0,2\pi]\}$$

define una norma en $X_{\mathbb{C}}$.

2. Consideremos el espacio de Hilbert ℓ^2 y la sucesión canónica $\{e_n\} \subset H$. Sean V la cerradura del espacio cerrado generado por $\{e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ y W la cerradura del espacio generado por $\{\frac{e_{2n}}{2n} - e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Prueba:
i) $V+W$ es denso en ℓ^2. ii) $V+W$ no es cerrado.

Definición Sean W un espacio vectorial y $\mathcal{S}$ una colección de operadores lineales $T : W \to W$. Un subespacio vectorial $V \subset W$ es *invariante bajo* $\mathcal{S}$, si $SV \subset V$, $\forall\, S \in \mathcal{S}$. Cuando $\mathcal{S} = \{T\}$, simplemente diremos que V es *invariante bajo* T(o T-invariante).

A continuación, X es un espacio normado y A es un álgebra de Banach.

3. Sean $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(X)$ y $V \subset X$ un subespacio. Si V es invariante bajo $\mathcal{S}$, prueba que $\overline{V}$ también lo es.

Definición Según el ejercicio 6.4, el operador lineal T ahí considerado se puede extender lineal y continuamente de manera única a $E := \overline{\mathrm{Esc}([a,b],X)}$. Denotemos por $\int_a^b f(s)ds \in X$ el valor asignado por dicho operador a $f \in E$.
4. Si $f \in E$, prueba que $\|f\|$ es R-integrable en $[a,b]$ y que se cumple $\| \int_a^b f(s)ds\| \leq \int_a^b ||f(s)||ds$.

5. Sean X y Y espacios de Banach. Prueba que el conjunto formado por los operadores $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tales que T es 1-1 y $R(T)$ es cerrado, es abierto.

6. Sea W un subespacio de X^* tal que $n := \dim W < \infty$. Prueba:
i) $\dim X/{}^{\perp}W = n$. (Sug.: Considera una base de W, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y analiza $T : X \to \mathbb{K}^n$ dado por $T(x) := (\varphi_1 x, \cdots, \varphi_n x)$.)
ii) $\dim({}^{\perp}W)^{\perp} = n$. iii) $W = ({}^{\perp}W)^{\perp}$.

7. Dado $x \in A$, prueba que $\{y \in A : xy = yx\}$ es una subálgebra de A con identidad, que es cerrada.

8. Prueba que $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$, $\forall\, x \in A$.

9. Sean $M \subset A$ un ideal cerrado y en el espacio de Banach cociente A/M definamos $[x][y] := [xy]$. Prueba que esto define un producto en A/M y que de esta forma A/M es un álgebra de Banach.

10. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Supongamos que λ_j es un valor propio de T y v_j un vector propio correspondiente, $j = 1, \ldots, n$. Si los escalares λ_j's son distintos entre sí, prueba que $v_1, \cdots, v_n$, son linealmente independientes.

11. Sean $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\{x_n\} \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\lambda \in \sigma(T)$ en los siguientes casos:
i) Si $(T - \lambda I)x_n \to 0$. ii) Si $\lambda_n \to \lambda$ y $(T - \lambda_n I)x_n \to 0$.

12. Encuentra explícitamente la función resolvente $(T - \lambda I)^{-1}$ para el operador de Volterra $T : C[0,1] \to C[0,1]$.

Para revisar y entregarse el lunes 7 de octubre, 2013