OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 8

1. Sean Z un espacio vectorial y V, W subespacios de Z. Si $\operatorname{codim} V < \infty$ y $\operatorname{codim} W < \infty$, prueba que $\operatorname{codim} V \cap W < \infty$. (Sug.: Considera la función $x \to \big([x]_{Z/V}, [x]_{Z/W}\big)$.

2. Si X es un espacio de Banach real, prueba que $X_{\mathbb{C}}$ (con la norma definida en el ejercicio 7.1.) es completo.

En seguida X y Y son espacios normados y A es un álgebra de Banach.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{S}$ la colección de todos los operadores $S \in \mathcal{L}(X)$ que conmutan con T. Prueba que $N(T)$ y $R(T)$ son invariantes bajo $\mathcal{S}$.

4. (Véase el ejercicio 7.4.) i) Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq c < d \leq b$. Si $f \in \overline{\operatorname{Esc}([a, b], X)}$. prueba que (su restricción) $f \in \overline{\operatorname{Esc}([c, d], X)}$. ii) Sea $c \in (a, b)$. Si $f \in E$, prueba que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

5. Sean $x, w \in A$. Si x y w conmutan, prueba que $e^{w+x} = e^w e^x$. Concluye que cada e^x es invertible.

6. Sean A y B álgebras. Si $h : A \to B$ es un homomorfismo, prueba que $h^{-1}(0)$ es un ideal.

Notación Denotaremos por $F(X, Y)$ el conjunto operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ que son de rango finito y $F(X) := F(X, X)$.

7. Prueba: i) $F(X, Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X, Y)$. ii) $F(X)$ es un ideal.

8. Sean $X := C[0, 1]$, $T : X \to X$ el operador de Volterra, $f \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Prueba: i) $T^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(s)(x - s)^{n-1} ds$.

ii) $T^n f$ es n veces continuamente derivable y $\frac{d^n}{dx^n} T^n f = f$.

9. Sea $s := \{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión tal que $|a_n| = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dada $x := \{b_n\} \subset \ell^2$, definamos $U_s x := \{a_n b_n\}$. Prueba que $U_s \in \ell^2$ y que $U_s : \ell^2 \to \ell^2$ es un operador unitario.

10. Determina $\sigma_\pi(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ para el operador lineal $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $T(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$.

11. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Prueba que las siguientes propiedades son equivalentes: i) $r_s(T) < 1$ ii) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T^N\| < 1$. iii) $\lim_{n\to\infty} T^n = 0$.

12. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y $R(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}$, $\forall\, \lambda \in \rho(T)$. Si $\lambda_0 \in \rho(T)$ y $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, prueba que $R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) R(\lambda) R(\lambda_0)$.

Para revisar y entregarse el lunes 14 de octubre, 2013