OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 9

En seguida X y Y son espacios de Banach y A es un álgebra de Banach.

1. Sea $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ un funcional lineal. Prueba que φ es continuo si, y sólo si, $N(\varphi) \subset X$ es cerrado.

2. Sea X un espacio normado real. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, prueba que $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

3. Sea $X = \ell^2$. Encuentra un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ que tenga inverso por la derecha y que no sea invertible.

4. Si $M \subset A$ es un ideal, prueba que $\overline{M}$ también lo es.

5. Prueba que el grupo de operadores invertibles es denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Definición Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $g : I \to X$ es *derivable en* $t \in I$, si existe $g'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h}$.

6. (Teorema fundamental del cálculo) Sea $E := \overline{\mathrm{Esc}([a,b], X)}$. Consideremos $f \in E$ y definamos $F(t) := \int_a^x f(s)ds, \forall\, t \in [a,b]$. Si f es continua en $t \in [a,b]$, prueba que F es derivable en t y $F'(t) = f(t)$.

7. Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión acotada, $p \in [1,\infty], X := \ell^p$ y definamos $T : X \to X$ por $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots,) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$. Prueba que $T \in \mathcal{L}(X)$ y $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n\}}$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, \frac{1}{2}x_3)$. Verifica que $0 < r_\sigma(T) < r_s(T)$.

9. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Prueba: i) $r_s(T^k) = r_s(T)^k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. ii) $r_s(T) = \|T\|$ si, y sólo si, $\|T^k\| = \|T\|^k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

10. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y R su función resolvente. Si $B \subset \rho(T)$ es un conjunto cerrado, prueba que R es acotada en B.

11. Sean X un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T)$ no es finito, prueba que el homomorfismo canónico de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}(T)$ ($P \mapsto P(T)$), es 1-1.

12. Sea H un espacio de Hilbert. Si $K \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto, prueba que K se puede aproximar por operadores de rango finito.

Para revisar y entregarse el lunes 21 de octubre, 2013