OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 10

En seguida X y Y son espacios normados y A es un álgebra de Banach.

1. Sean I un intervalo, $f : I \to X$ y $t \in I$. Si f es derivable en t, prueba que f es continua en t.

2. Supongamos que $\dim A < \infty$ y $x \in A$. Si x tiene inverso por la izquierda (o por la derecha), prueba que x es invertible. (Sug.: Considera el operador $Tu = xu,\ \forall\, u \in A$.)

3. Si $K \subset S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un conjunto compacto y no vacío, prueba que existe un operador unitario tal que $\sigma(T) = K$.

4. Sea A un álgebra de Banach y $x, y \in A$. Si x es invertible, prueba que $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

Definición Un valor propio λ de $T \in \mathcal{L}(X)$, es *simple* si $\dim N(T - \lambda I) = 0$.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y supongamos que $v \in X$ es un vector propio asociado a un valor propio simple de T. Si $S \in \mathcal{L}(X)$ es invertible y $ST = TS$, prueba que v también es vector propio de S.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ y supongamos que $\sigma(T) \neq \emptyset$. Dado $\epsilon > 0$, prueba que existe $r > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|T - S\| < r$, entonces $d(\mu, \sigma(T)) < \epsilon$, para cualquier $\mu \in \sigma(S)$.

7. Sea X un espacio de Banach. Verifica que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal en $\mathcal{L}(X)$.

8. Sean X y Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, prueba que su operador inducido en $X/N(T)$ también lo es.

9. Sean X y Y espacios de Banach, y $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Si $R(K)$ es cerrado, prueba que $\dim R(K) < \infty$. (Luego, si $\dim R(K) = \infty$, entonces $R(K)$ no es cerrado.)

10. Muestra que puede suceder que $X = V \dot{+} W$ sin que V o W sea cerrado. (Sug.: considera un ejercicio de la tarea anterior.)

11. Si $\dim X = \infty$, prueba que existen sucesiones $\{x_n\} \subset X$ y $\{\varphi_m\} \subset X^*$ tales que $\langle x_n, \varphi_m \rangle = \delta_{m,n},\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

12. Sean X y Y espacios normados y $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $R(T)$ es cerrado y $S \in F(X)$, prueba que $R(T + S)$ es cerrado.

Para revisar y entregarse el lunes 28 de octubre, 2013