OPERADORES LINEALES ACOTADOS: TAREA 11

En lo que sigue X es un espacio normado.

1. Sean I un intervalo no vacío y $f : I \to X$. Si $f'(t) = 0, \forall\, t \in I$, prueba que f es constante. (Sug.: trata de "escalarizar".)

2. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, prueba que existe $r > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| < r$, entonces $\sigma(S) = \emptyset$.

3. Sea X un espacio de Banach. Si $\dim X = \infty$, prueba que el ideal $F(X)$ no es cerrado.

4. Para $s = \{x_n\} \in \mathrm{c}_0$, definamos $Ts := \{\frac{x_n}{n}\} \in \mathrm{c}_0$. Sea $W = R(T)$. Prueba que $T \in \mathcal{K}(\mathrm{c}_0, \mathrm{c}_0)$ y $T \notin \mathcal{K}(\mathrm{c}_0, W)$.

5. Sean $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$ una sucesión acotada y $p \in [1, \infty)$. Para $x = \{x_n\} \in \ell^p$, definamos $Tx := \{a_n x_n\}$. Si $a_n \to 0$, prueba que $T \in \mathcal{K}(\ell^p)$.

6. Determina si la inclusión $i : \ell^1 \to \ell^2$ es compacta.

7. Sean X y Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, prueba que T lleva sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes.

8. Sean X y Y espacios normados. Si $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, prueba que $R(K)$ es separable.

9. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ y $T : C[a, b] \to C[a, b]$ un operador integral tipo Volterra con núcleo continuo K. Prueba que T^2 también es un operador integral de tipo Volterra y señala su núcleo.

10. Sean V y W subespacios de X tales que $X = V \oplus W$. Si X es completo, prueba que existe una proyección sobre V.

11. Si $V \subset X$ es un subespacio complementable, prueba que cualquier operador $T \in \mathcal{L}(V, Y)$ se puede extender continua y linealmente a X.

12. Sea $T \in \Phi(X)$. Si $\mathrm{ind}\,(T) = 0$, prueba que existe un operador invertible $S \in \mathcal{L}(X)$ y $K \in \mathcal{K}(X)$ tal que $T = S + K$.

Para revisar y entregarse el lunes 4 de noviembre, 2013